Kapitel 0

Einleitung

Diese Einleitung soll die angestrebte Allgemeinheit motivieren, zum gewählten Zugang hinführen und zudem mit den im folgenden benutzten Notierungsweisen etwas vertraut machen.

Integrationsprobleme treten in vielen Bereichen der Mathematik und ihrer Anwendungen auf, z. B.:

- Bestimmung von Längen, Flächen, Volumina, ...
- Umkehrung der Differentiation
- Lsgn von DGLen
- Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, FA, ...

Aus der Einleitung des Buches HOFFMANN/SCHÄFKE *„Integrale“:*

„In der reellen und komplexen Analysis, der Funktionalanalysis, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie nicht zuletzt in der Theoretischen Physik spielen eine Reihe verschiedenartiger Integralbegriffe eine wesentliche Rolle. Dies sind etwa schon in den Anfängen der Analysis — eindimensional, danach mehrdimensional —

Integral von Regelfunktionen,
RIEMANN-Integral,
uneigentliches RIEMANN-Integral,

dann etwas später das wesentlich leistungsfähigere

LEBESGUE-Integral.

Daneben sind an vielen Stellen verschiedenartige

STIELTJES-Integrale

unverzichtbar und, damit eng zusammenhängend,

Kurvenintegrale.

Die Reihe setzt sich fort mit Integralbegriffen der Funktionalanalysis für vektorwertige Funktionen und/oder Inhalte, speziell den

Spektral-Integralen.

Kapitel 0

Schließlich spielen in anderer Richtung eine wesentliche Rolle das

BOURBAKI-Integral

und das

HAAR-Integral (wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.)

auf lokalkompakten HAUSDORFF-Räumen bzw. entsprechenden topologischen Gruppen."

Ich möchte Sie ‚unten abholen', also zur Motivation an bekannte, ganz einfache Dinge anknüpfen; deshalb beschreibe ich zunächst die Grundsituation, die etwa bei der **Einführung eines Integrals in AI** vorliegt:

Wenn ich oft betone, daß man Integrale *so* einführen sollte, dann beziehe ich mich auf die Situation, daß frühzeitig — wie bei uns in der Regel gegeben — elementare metrisch-topologische Grundbegriffe eingeführt sind und mehr als nur ein Integral benötigt wird. An einer Schule oder FH, wo nur *ein* einfaches Integral benötigt wird und diese Vorkenntnisse nicht gegeben sind, ist die Situation anders!

Zu $-\infty < a < b < \infty$ betrachten wir

$\mathbb{S} := \{\langle\alpha,\,\beta\rangle : a \le \alpha \le \beta \le b\}$ (Menge der Teilintervalle von $[a,b]$);

dabei bezeichne $\langle\alpha,\,\beta\rangle$ ein beliebiges Intervall mit den Endpunkten α und β.

$\mathfrak{E} := \left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{i_\nu}\alpha_\nu : i_\nu \in \mathbb{S},\, \alpha_\nu \in \mathbb{R};\, n \in \mathbb{N}\right\}$

(χ ⋯ *„charakteristische Funktion"* [bei fester Grundmenge])

Menge der *„Treppenfunktionen"* oder *„einfachen Funktionen"*

$\mu(\langle\alpha,\,\beta\rangle) := \beta - \alpha$ für $\langle\alpha,\,\beta\rangle \in \mathbb{S}$ (*„Länge"* des Intervalls $\langle\alpha,\,\beta\rangle$)

Für $h = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{i_\nu}\alpha_\nu \in \mathfrak{E}$ sei $i(h) := \int\limits_a^b h(x)\,dx := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \mu(i_\nu)\,\alpha_\nu$

(Rechtfertigung: wohldefiniert …; Bildchen …)

Eigenschaften:

(0) $\emptyset \ne \mathbb{S} \subset \mathbb{P}([a,b])$ ($\mathbb{P}$ Potenzmenge) mit ($\rightsquigarrow$ Intervalle, Rechtecke)

(1) $A,\, B \in \mathbb{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathbb{S}$ (diese Forderung ist *nicht* wesentlich)

(2) $A,\, B \in \mathbb{S} \Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{S} \quad A \setminus B = \biguplus\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$

(3) $\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow [0,\infty[$ ist *„endlich-additiv":* (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:)

$$A,\, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{S} \wedge A = \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu \Longrightarrow \mu(A) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)$$

(4) $\mathfrak{E}$ ist UR von $\mathfrak{F}([a,b],\,\mathbb{R})$ und

$i\colon \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *linear, positiv* (isoton) *(„elementares Integral")*

A) Hier **gesucht:**

$\mathbb{S} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{P}([a,b])$,
$\mathfrak{E} \subset \mathfrak{I} \subset \mathfrak{F}([a,b], \mathbb{R})$, $(\mathfrak{F}(A,B) \cdots)$,
$\overline{\mu}\colon \mathbb{M} \longrightarrow [0,\infty[$ mit $\overline{\mu}/\mathbb{S} = \mu$,
$\overline{\imath}\colon \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\overline{\imath}|_{\mathfrak{E}} = i$ und — neben (1) – (4) für $(\mathbb{M}, \overline{\mu}, \mathfrak{I}, \overline{\imath})$ — möglichst *‚schönen'* Eigenschaften.

Dabei *einheitliches Prinzip für verschiedene Erweiterungsmöglichkeiten.*

In AI: **Riemann-Integral:**

Vorteil: anschaulich, Nachteile: nicht ‚vollständig', ‚keine' ‚Konvergenzsätze', für manche Zwecke zu wenig Funktionen ...

oder **Integral von Regelfunktionen** (gleichmäßige Limites von Trfn)

Vorteil: ‚vollständig', Nachteile: noch weniger Funktionen, wenig ‚Konvergenzsätze'; Übertragung aufs Mehrdimensionale macht Schwierigkeiten

B) Allgemeinere Ausgangssituationen

Einfachste Verallgemeinerung: (für $n \in \mathbb{N}$)

$[a,b] \rightsquigarrow \emptyset \neq \mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n$
(also z. B. auch $]-\infty, \infty[$; $\rightsquigarrow$ mehrdimensionale Analysis)
$\mathbb{S} \rightsquigarrow$ $\{n$-dimensionale Quader$\}$
$\mu \rightsquigarrow$ Produkt der Kantenlängen eines n-dimensionalen Quaders

Weitere Verallgemeinerung:

$[a,b] \rightsquigarrow$ beliebige (nicht-leere) Menge
(Flächen, Körper, Grundmenge eines W-Raums, ...)
$\mathbb{S} \rightsquigarrow$ Mengensystem (mit einfachen Eigenschaften)
(Intervalle, Rechtecke, Quader, Oberflächenstücke, ...):
„Prä-Ringe" oder „Semi-Ringe"

Welche Werte betrachtet man zweckmäßig für μ ?:

μ **mit Wertebereich** $[0,\infty[$:
Länge, Fläche, Volumen, Anzahl ($\rightsquigarrow$ *Reihenlehre),* Wahrscheinlichkeiten, Massen, Punkt- (oder Dirac-) Maße; *beliebige Grenzwertbildungen* einbeziehbar

μ **mit Wertebereich** $\mathbb{R}$**:**
Riemann-Stieltjes- und Lebesgue-Stieltjes-Integrale:
$\mu(\langle\alpha, \beta\rangle) := g(\beta) - g(\alpha)$ $(\ldots)$
elektrische Ladungen; *„signierte Maße"* bzw. *„signierte Inhalte"*.

Allgemeinerer Wertebereich für μ:

Arbeit: $\langle$Kraft, Weg$\rangle \rightsquigarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ $\rightsquigarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$
Spektralintegrale $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ $(\mathfrak{B}_\nu$ BRe$)$ $\big($zunächst $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ $(\mathfrak{H}_\nu$ HRe$)\big)$

Wertebereich für Funktionen allgemeiner als $\mathbb{R}$:
Vektorwertige Funktionen mit allgemeinem Definitionsbereich

Der *mögliche* Allgemeinheitsgrad ist *nicht* ausgeschöpft: Topologische Gruppen, Uniforme Halbgruppen, ...

Verschiedene Zugänge zum klassischen Lebesgue**-Integral**

1. Zunächst (aufwendig!) Erweiterung von $(\mathbb{S}, \mu)$ (*Maßerweiterung*), dann damit von $\mathfrak{C}$ und schließlich von i (*Integralerweiterung*).
2. D-Integral (Radonmaße): Grundmenge Topologischer Raum, Integral für stetige Funktionen ‚elementar' ...
3. Wir (wesentlich vorteilhafter!): *Sofort* Integralerweiterung, Methode: Über **Integralnormen**. Die Maßerweiterung gibt es als Abfallprodukt gratis dazu!

Sonst wird meist erst *im nachhinein* der Raum der integrierbaren Funktionen als topologischer Abschluß ‚einfacher' Funktionen und das Integral als stetige Fortsetzung erkannt; hier wird dies gleich zu Beginn als Definition genommen und dann gewinnbringend genutzt.

Aus der Einleitung des Buches Hoffmann/Schäfke *„Integrale":*

„Bei der **Einführung eines Integralbegriffs** ist stets die folgende Situation gegeben: Man hat bereits ein *„elementares Integral"*, d. h. eine meist in natürlicher Weise erklärte lineare Abbildung auf einem Bereich *„einfacher Funktionen"*; der entscheidende Punkt ist nun, eine ‚vernünftige' Fortsetzung dieses elementaren Integrals auf einen möglichst umfassenden Bereich *„integrierbarer"* Funktionen zu finden. Unsere Darstellung macht deutlich, daß es sich — bei den genannten wichtigsten Integral-Begriffen — stets um einen einfachen Prozess *„stetiger Fortsetzung"* handelt, wobei sich die Stetigkeit auf eine in bestimmtem Sinne ‚geeignete' metrisch-topologische Struktur bezieht, die durch eine leicht zu erklärende *„Integralnorm"* gegeben ist. Es handelt sich hier um eine (vorweg) für alle Funktionen erklärte ‚messende Größe', die wesentliche Eigenschaften einer ‚Norm' hat, etwa die Dreiecksungleichung, andererseits jedoch in bestimmter Weise zu dem gegebenen elementaren Integral und damit meist mit Hilfe dieses Integrals gebildet wird; dies erklärt die gewählte Bezeichnung.

Die wichtigsten Integralbegriffe werden mit einer einheitlichen und, wie deutlich werden wird, sehr einfachen Methode gewonnen: durch

Fortsetzung elementarer Integrale mittels geeigneter Integralnormen."

Die Idee, den Erweiterungsprozeß so zu gestalten, findet man in Ansätzen und in Spezialfällen seit etwa 1950 bei verschiedenen Autoren. In weitestgehender und konsequentesterweise ist dies von Herrn F.W. Schäfke und Schülern (u. a. D. Hoffmann, H. Volkmer und H. Weber) seit etwa 1970 in einem sehr allgemeinen Rahmen untersucht worden.

Diese Überlegungen sind — neben ihrer weittragenden Allgemeinheit — auf Grund ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit (natürlich im Vergleich zu sonstigen Zugängen) auch in besonderem Maße zur Einführung von Integralen in den Grundvorlesungen geeignet. Denn auch in den einfachsten Spezialfällen bieten diese Ideen — bei dann gegebenenen Vereinfachungen — noch wesentliche methodische Vorteile.

Als ich selbst während des Studiums die erste Integrationstheorie (für vektorwertige Funktionen und operatorwertige Maße) hörte, war diese — orientiert an Dunford/Schwartz I — sehr kompliziert und wenig übersichtlich; wir Studenten haben damals alle sehr darunter ‚gelitten'. Wenige Jahre später war dann alles — durch Integralnormen und Fortsetzungsprinzip — wunderbar geordnet, übersichtlich und einfach geworden.

Eine umfassende Darstellung dieser Überlegungen (aber nicht so allgemein wie möglich!) findet man in dem Buch Hoffmann/Schäfke *„Integrale"* (1992).

Wir werden zu Beginn das **Fortsetzungsprinzip** kennenlernen — ganz einfach, dennoch leistungsfähig und vielfältig einsetzbar. Wichtig ist dabei — wie auch bei anderen vergleichbar wichtigen Sätzen — zu sehen, *wo und wie einfache Ideen eingesetzt werden können.*

Das nahezu triviale **Vergleichsprinzip** wird den Vergleich verschiedener Fortsetzungen ermöglichen.

Besonders betonen möchte ich, daß die Mengensysteme, die wir betrachten werden, *„Prä-Ringe"* genannt, genau das abstrahieren, was man z. B. bei Intervallen und Rechtecken gegeben hat und was sich zudem bei der Produkt-Bildung überträgt. Für diejenigen, die einen anderen Zugang zum Beispiel zum Lebesgue-Integral schon kennengelernt haben, sei gesagt: Prä-Ringe erfassen viele Gegebenheiten, die keine *Ringe, Algebren* usw. liefern. Baut man die Integrationstheorie direkt von Prä-Ringen ausgehend auf, so wird ‚das Leben' leichter; denn man muß dann nachher im Einzelfall nur sehr wenig nachweisen.

Im ersten Teil der Vorlesung beschränke ich mich zum Einstieg weitgehend auf die Integration *reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen* bezüglich des *Inhalts,* der durch die Intervall-Länge gegeben ist, obwohl die Verallgemeinerung auf BR-wertige Funktionen, die auf einer beliebigen Menge definiert sind, bezüglich beliebiger $[0, \infty[$-wertiger Inhalte — wie wir später sehen werden — ganz einfach ist.