Kapitel 1

Integralbegriffe für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen

Kapitel 1

1.3 Einfache Funktionen · Elementares Integral

Wir gehen aus von dem $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellen Funktionen, den wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen. Ist M Teilmenge von $\mathbb{R}$, so schreiben wir χ_M für die *„charakteristische Funktion“* von M, die den Wert 1 in M und 0 außerhalb hat. Sei nun $\mathbb{S}$ das System aller beschränkten Intervalle innerhalb $\mathbb{R}$; das sind also alle (beschränkten) offenen, abgeschlossenen, halboffenen Intervalle, einschließlich einpunktiger Mengen und der leeren Menge. Den von den charakteristischen Funktionen dieser Intervalle aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} := \operatorname{span}\Big\{\chi_A : A \in \mathbb{S}\Big\} = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \chi_{A_\nu} \colon a_\nu \in \mathbb{R}, A_\nu \in \mathbb{S}\ (\nu = 1, \ldots, n);\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Dies sind unsere *„einfachen“* oder *„elementaren“ Funktionen*, anschaulich offenbar die ‚Treppenfunktionen‘.

Für $A \in \mathbb{S}$ notieren wir mit $\mu(A)$ die „Länge“, die Differenz der Endpunkte; damit erhalten speziell einpunktige Mengen und die leere Menge den Wert 0. μ ist, wie wir sagen wollen, ein *„klassischer Inhalt“* auf $\mathbb{S}$, das heißt eine nicht-negative Funktion, die *„endlich-additiv“* ist: Für

$$A = A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_n \quad \text{in} \quad \mathbb{S} \quad \text{gilt} \quad \mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)\,.$$

Hier und weiterhin bezeichnen wir mit ‚$\uplus$‘ Vereinigungen disjunkter Mengen. Die einfachen Beweisgedanken, bei denen man von einer naturgemäßen Reihenfolge der Intervalle ausgeht, dürfen wir als elementare Übung dem Leser überlassen.

Ziel ist nun die Einführung des *„elementaren Integrals“* i als lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathbb{R}$ mit

(a) $$i(\chi_A) = \mu(A)\ .$$

Durch diese Werte auf den erzeugenden Elementen von $\mathfrak{E}$ wäre natürlich i eindeutig bestimmt und

(b) $$h = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \chi_{A_\nu}$$

müßte den Wert

(c) $$i(h) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\, a_\nu$$

erhalten. Dies kann nun nicht unmittelbar als Definition von i dienen. Man muß zuvor die Unabhängigkeit der rechten Seite von der speziellen Darstellung von h als Linearkombination zeigen: *Aus*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \chi_{A_\nu} = \sum_{\kappa=1}^{k} b_\kappa\, \chi_{B_\kappa}$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\, a_\nu = \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(B_\kappa)\, b_\kappa\ .$$

Dies heißt linear-algebraisch nichts anderes, als daß eine lineare Relation zwischen den erzeugenden Elementen, die eben keine Basis bilden, entsprechend auch zwischen den zugedachten Werten gelten muß. — Zum Beweis hat man natürlich die Additivität von μ und die Zerlegungseigenschaften der Intervalle heranzuziehen. Es ist nun bemerkenswert, daß es genügt, die folgende *Zerlegungseigenschaft* zu verwenden, die von der speziellen eindimensionalen Struktur, die man beim klassischen Zugang benutzt, weitgehend abstrahiert:

Sind A_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ beliebige Elemente aus $\mathbb{S}$, so gibt es disjunkte C_λ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \ell)$ *in $\mathbb{S}$ derart, daß jedes A_ν (disjunkte) Vereinigung gewisser, eben der in ihm enthaltenen, C_λ ist:*

$$A_\nu = \biguplus \{C_\lambda : C_\lambda \subset A_\nu\}\ .$$

Zum *Beweis* der oben hervorgehobenen linearen Relation bestimmt man nun zu dem System $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_k$ zugehörige $C_1, C_2, \cdots, C_\ell$ gemäß der eben notierten Zerlegungseigenschaft. Dann wird mit Benutzung der Additivität von μ und durch Umordnung

(∗) $$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\, a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{C_\lambda \subset A_\nu} \mu(C_\lambda)\, a_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\ell} \Big\{ \mu(C_\lambda) \sum_{A_\nu \supset C_\lambda} a_\nu \Big\}\ .$$

Nun ist aber aufgrund der vorausgesetzten Gleichheit der beiden Linearkombinationen charakteristischer Funktionen im Falle $C_\lambda \neq \emptyset$ gewiß

$$\sum_{A_\nu \supset C_\lambda} a_\nu = \sum_{B_\kappa \supset C_\lambda} b_\kappa\ .$$

Dies aber ergibt, indem man (∗) entsprechend für die B_κ, b_κ aufschreibt, unmittelbar die Behauptung. □

(Etwas weniger schreiben müßte man, wenn man vorweg — was offenbar möglich ist — auf $\sum_{\kappa=1}^{k} b_\kappa\, \chi_{B_\kappa} = 0$ reduzierte.)

So ist also gezeigt: *(c) für ein h aus $\mathfrak{E}$ mit der Darstellung (b) definiert die eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$i\colon \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit (a).

Indem man — aufgrund der notierten Zerlegungseigenschaft — eine Darstellung (b) mit disjunkten A_ν heranzieht, erkennt man unmittelbar die *„Positivität“* von i: *Aus $h \geq 0$ folgt $i(h) \geq 0$.* Zusammen mit der Linearität hat man die *„Monotonie“: Aus $k \geq h$ folgt $i(k) \geq i(h)$.*

Wir vermerken noch, daß, *wenn h aus* $\mathfrak{E}$ ist, *auch die Betragsfunktion $|h|$ zu* $\mathfrak{E}$ gehört. Vor allem notieren wir

$$|i(h)| \leq i(|h|)\ ,$$

was sich mit $\pm h \leq |h|$ unmittelbar aus der Monotonie ergibt.

Abschließend halten wir fest: *Für h und k aus $\mathfrak{E}$ gehören auch das Supremum, $h \vee k$, und das Infimum, $h \wedge k$, zu $\mathfrak{E}$.* Das erkennt man entweder direkt mit gemeinsamer disjunkter Beschreibung oder aus der Darstellung von Supremum und Infimum mit Hilfe von Linearkombination und Betrag:

$$\left.\begin{matrix} h \vee k \\ h \wedge k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(h+k) \pm \frac{1}{2}|h-k|.$$

1.4 Die Riemann-Darboux-Norm

Für den von uns zu beschreibenden einfachen Erweiterungsprozeß vom elementaren Integral zum Riemann-Integral verwenden wir nun für die reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$ eine zugeordnete messende Größe, nicht-negativ reell oder ∞, die sich naturgemäß für f aus $\mathfrak{F}$ aus der Majorisierung von $|f|$ durch (nicht-negative) einfache Funktionen und deren Integralwerten ergibt: Wir schreiben

$$\|f\| := \inf\big\{ i(h) : h \in \mathfrak{E}, |f| \leq h \big\}\ ,$$

wobei wir hier und in ähnlichen Fällen stets

$$\inf \emptyset := \infty$$

verabreden. Dies heißt also: Falls $|f|$ durch eine Treppenfunktion majorisierbar ist, also offenbar, falls f außerhalb eines beschränkten Intervalls $[a, b]$ den Wert 0 hat und im übrigen beschränkt ist, soll

$$\|f\| = \overline{\int_a^b} |f(x)|\, dx$$

(oberes Darboux-Integral des Betrages) sein, andernfalls $\|f\| = \infty$.

Wir notieren folgende Eigenschaften:

(0) $\qquad \|\ \| : \mathfrak{F} \longrightarrow [\,0\,,\,\infty\,]$,

(1) $\qquad \|0\| = 0$,

(2) $\qquad |f| \le |f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n| \implies \|f\| \le \|f_1\| + \|f_2\| + \cdots + \|f_n\|$,

(3) $\qquad \|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad (\,0 \cdot \infty := 0\,)$.

Speziell für $h \in \mathfrak{E}$ gilt

(4) $\qquad |\,i(h)\,| \le \|h\|$,

(5) $\qquad \|h\| = i(\,|h|\,)$.

Natürlich sind diese Eigenschaften nicht unabhängig: Aus (5) folgt sowohl (1) als auch — mit den Integraleigenschaften — (4); ebenso folgt aus (3) die Eigenschaft (1). Die gewählte Notierung aller dieser Eigenschaften geschieht hier aus Rücksicht auf spätere allgemeinere Fälle, in denen eben (3) oder (5) nicht gelten.

(2) — für $n \in \mathbb{N}$ — ist offenbar äquivalent zu dem Bestehen der beiden Eigenschaften

(2a) $\qquad \|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$,

(2b) $\qquad |f| \le |g| \implies \|f\| \le \|g\|$,

zu *Dreiecksungleichung* und *Monotonie.*

Die sehr einfache Bestätigung von (0), (1), (5) und (4) bitten wir den Leser selbst nachzuvollziehen. — Für den *Beweis* von (2) genügt es, die rechte Seite der Behauptung als endlich anzunehmen, das heißt aufgrund der gewohnten Verabredung des Umgangs mit ∞, alle Summanden als endlich vorauszusetzen. Nach der Definition der von uns eingeführten „Riemann-Darboux-*Norm*“ gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ einfache Funktionen $h_1,\, h_2,\, \cdots,\, h_n$, die jeweils die Beträge von $f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n$ majorisieren mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Summe ihrer elementaren Integrale die Summe der ‚Normen‘ von $f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n$, also die rechte Seite der Behauptung, höchstens um ε übertrifft. Nach Voraussetzung majorisiert nun die Summe dieser einfachen Funktionen den Betrag von f. Nach der Definition der Riemann-Darboux-Norm hat man also

$$\|f\| \le i(h_1) + i(h_2) + \cdots + i(h_n) \le \|f_1\| + \|f_2\| + \cdots + \|f_n\| + \varepsilon .$$

Betrachtet man die äußeren Terme, so folgt wegen der Willkür von ε die Behauptung. — Zum Beweis von (3) kann man sich auf $\alpha \neq 0$ beschränken. Dann ist unsere Formel mit der Bemerkung erkennbar, daß h eine den Betrag von f majorisierende einfache Funktion genau dann ist, wenn dies entsprechend für $|\alpha \cdot h|$ und $\alpha \cdot f$ gilt. □

1.5 Ein einfaches allgemeines Prinzip stetiger Fortsetzung

Die Gewinnung des Riemann-Integrals aus dem elementaren Integral von einfachen Funktionen (Treppenfunktionen) mittels der eben eingeführten Riemann-Darboux-Norm wollen wir nun sogleich in wesentlich verallgemeinerter Form notieren. Wir benutzen dabei den Begriff der *„Pseudonorm“* — wir schreiben wieder $\|\ \|$ — für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, wieder bezeichnet mit $\mathfrak{F}$, und verlangen dafür allein die obigen Eigenschaften

(0) $\qquad \|\ \| : \mathfrak{F} \longrightarrow [\,0\,,\,\infty\,]$,

(1) $\qquad \|0\| = 0$,

(2a) $\qquad \|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$,

(3) $\qquad \|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad (\,0 \cdot \infty := 0\,)$.

Wir sollten vermerken, daß hier gegenüber dem Begriff der „Norm“, der dem Leser vertraut sein wird, sowohl die Forderung endlicher Werte als auch die der „Definitheit“, $\|f\| = 0 \implies f = 0$, fehlen.

Die oben eingeführte Riemann-Darboux-Norm ist nur eine Pseudonorm. Sie ist weder nur endlichwertig, weil es in $\mathfrak{F}$ offenbar nicht durch einfache Funktionen majorisierbare Funktionen gibt; noch ist sie definit: Man sieht dazu sofort ein, daß eine Treppenfunktion den Wert 0 der Riemann-Darboux-Norm genau dann erhält, wenn sie an höchstens endlich vielen Stellen von 0 verschiedene Werte hat.*

Wir notieren nun folgendes

Fortsetzungsprinzip: **

$\mathfrak{F}$ sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Pseudonorm $\|\ \|$ und $\mathfrak{E}$ ein Untervektorraum. Dann ist $\mathfrak{I}$, definiert als Menge der f aus $\mathfrak{F}$, für die es „approximierende“ Folgen (h_n) aus $\mathfrak{E}$ mit

$$\|h_n - f\| \longrightarrow 0$$

gibt, ein $\mathfrak{E}$ umfassender Untervektorraum. Ist weiter i eine lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathbb{R}$ mit einer Abschätzung

$$\big|i(h)\big| \le \|h\|$$

auf $\mathfrak{E}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bar{\imath}$ von $\mathfrak{I}$ in $\mathbb{R}$ derart, daß erstens $\bar{\imath}$ Fortsetzung von i ist und zweitens auf $\mathfrak{I}$ der Abschätzung

$$\big|\bar{\imath}(f)\big| \le \|f\|$$

genügt.

* Andere wichtige Pseudormen, die *nicht* Normen sind, ergeben sich etwa durch die *Totalvariation,* die *Abbildungsnorm,* die *Supremumsnorm* und das *‚Integral des Betrages‘*.

** Ohne Mehraufwand könnte man entsprechend gleich *allgemeiner* betrachten:

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathfrak{B}_1$ $\mathbb{K}$-NVR, $\mathfrak{B}_2$ $\mathbb{K}$-BR (beide nicht-trivial ($\neq \{0\}$), Normen mit $|\ |$ bezeichnet)

$\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge, $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}_1)$ als $\mathbb{K}$-VR (mit punktweise definierten Vektorraumoperationen), $\mathfrak{E}$ UR von $\mathfrak{F}$ und $i : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{B}_2$ linear mit

$$|i(h)| \le \|h\| \quad \text{für} \quad h \in \mathfrak{E}\,.$$

Offenbar gilt

$$\mathfrak{I} \,=\, \{\, f \in \mathfrak{F} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, h \in \mathfrak{E}\ \|f-h\| < \varepsilon \,\} \,=\, \overline{\mathfrak{E}}^{\|\ \|}\,.$$

Zum *Beweis* des Fortsetzungprinzips ist zunächst zu zeigen, daß $\mathfrak{I}$, das natürlich $\mathfrak{E}$ umfaßt, $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Dazu betrachtet man zwei Elemente f und g aus $\mathfrak{I}$ und ein α aus $\mathbb{R}$. Zu f und g wählt man (approximierende) Folgen (h_n) und (k_n) in $\mathfrak{E}$ mit $\|h_n - f\| \to 0$ und $\|k_n - g\| \to 0$. Die entsprechenden Eigenschaften der Pseudonorm, im ersten Falle die Homogenität (3), im zweiten Falle die Dreiecksungleichung (2a), ergeben dann unmittelbar

$$\|\alpha h_n - \alpha f\| \to 0\,, \quad \|(h_n + k_n) - (f+g)\| \to 0\,.$$

Hieraus liest man die erste Behauptung ab.

Nun zur Fortsetzung von i. Zunächst ist klar: *Falls* ein $\bar{\imath}$ mit den genannten Eigenschaften existiert, so muß für ein f aus $\mathfrak{I}$ und eine dann existierende approximierende Folge (h_n) aus $\mathfrak{E}$

$$\left|\bar{\imath}(f) - i(h_n)\right| \,=\, \left|\bar{\imath}(f) - \bar{\imath}(h_n)\right| \,=\, \left|\bar{\imath}(f-h_n)\right| \,\le\, \|f - h_n\| \to 0\,,$$

also $i(h_n) \to \bar{\imath}(f)$ gelten. Damit erkennt man zunächst die Eindeutigkeit. Andererseits ist die Definition von $\bar{\imath}$ nun zwangsläufig: Ist (h_n) eine approximierende Folge für f, so ergibt die Dreiecksungleichung

$$\left|i(h_n) - i(h_m)\right| \,\le\, \|h_n - h_m\| \,\le\, \|f - h_n\| + \|f - h_m\|\,.$$

Die Folge der ‚Integralwerte' $i(f_n)$ ist also Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, besitzt also einen Grenzwert. Dieser ist nun von der Auswahl der approximierenden Folge zu f unabhängig. Hat man nämlich (k_n) als eine zweite approximierende Folge zum gleichen f, so ist auch die gemischte Folge $h_1, k_1, h_2, k_2, \cdots$ offenbar approximierende Folge zu f und so die Folge der ‚Integralwerte' konvergent; die beiden interessierenden Teilfolgen $i(h_n)$ und $i(k_n)$ haben daher den gleichen Grenzwert. Der nun als nur von f abhängend erkannte Grenzwert der ‚Integralwerte' approximierender Folgen kann also mit $\bar{\imath}(f)$ bezeichnet werden. — Die Betrachtung konstanter Folgen zeigt, daß $\bar{\imath}$ Fortsetzung von i ist. Die Linearität von $\bar{\imath}$ ergibt sich in naheliegender Weise im Anschluß an die Überlegungen zur Vektorraum-Eigenschaft von $\mathfrak{I}$. Bei der Summe zum Beispiel war $(h_n + k_n)$ approximierende Folge zu $f+g$ und die Folge der ‚Integralwerte', wegen der Linearität von i also $i(h_n) + i(k_n)$, konvergiert nach Definition einerseits gegen $\bar{\imath}(f) + \bar{\imath}(g)$, andererseits gegen $\bar{\imath}(f+g)$. — Ähnlich ergibt sich schließlich die behauptete verallgemeinerte Abschätzung: Wieder wird eine approximierende Folge (h_n) zu f verwendet. Man hat sowohl $i(h_n) \to \bar{\imath}(f)$ als auch $\|h_n\| \to \|f\|$, letzteres aus der bekannten Folgerung aus der Dreiecksungleichung

$$\Big|\, \|f\| - \|h_n\| \,\Big| \,\le\, \|f - h_n\| \quad (\infty - \infty := 0)\,.$$

So folgt also aus der vorausgesetzten Abschätzung in $\mathfrak{E}$,

$$\left|i(h_n)\right| \,\le\, \|h_n\|\,,$$

die letzte Behauptung durch Grenzübergang. □

Naturgemäß stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, diesen Fortsetzungsprozeß zu iterieren, also für $\mathfrak{I}$ und $\bar{\imath}$ an Stelle von $\mathfrak{E}$ und i erneut durchzuführen. Diese Frage beantwortet sich durch die Feststellung:

Hat man $\|f_n - f\| \to 0$ *für* f_n *aus* $\mathfrak{I}$ *und* f *aus* $\mathfrak{F}$*, so ist* f *aus* $\mathfrak{I}$ *und es gilt* $\bar{\imath}(f_n) \to \bar{\imath}(f)$*.*

Hierzu verwendet man, was nach Definition von $\mathfrak{I}$ möglich ist, zu den f_n aus $\mathfrak{I}$ jeweils g_n aus $\mathfrak{E}$ mit $\|g_n - f_n\| \to 0$ und hat sofort aufgrund der Dreiecksungleichung $\|f - g_n\| \to 0$, also f aus $\mathfrak{I}$. Die Aussage über die Werte von $\bar{\imath}$ ergibt sich dann aus der Abschätzung durch die Pseudonorm in Verbindung mit der Linearität. □

1.6 Das Riemann-Integral als stetige Fortsetzung

Wie der Leser unmittelbar bestätigen wird, haben wir die Voraussetzungen des eben formulierten Fortsetzungsprinzips durch Abstraktion aus dem Sachverhalt im Zusammenhang mit der Riemann-Darboux-Norm gewonnen. Unser Fortsetzungsprozeß kann mithin direkt auf $\mathfrak{F}$ als die reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$, $\mathfrak{E}$ als die Treppenfunktionen, i als das elementare Integral und die Riemann-Darboux-Norm $\|\ \|$ angewendet werden. Wir bezeichnen nun die Funktionen aus dem damit erhaltenen Unterraum $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{F}$ als „Riemann-*integrierbar*" und das gewonnene $\bar{\imath}$ als das auf diesen Funktionen definierte „Riemann-*Integral*". Wir schreiben dann für f aus $\mathfrak{I}$ auch

$$\bar{\imath}(f) \,=:\, \int f(x)\,dx\,.$$

Überdies wollen wir vereinbaren, der Einfachheit halber statt $\bar{\imath}$ auch wieder i zu schreiben.

Die mit der Linearität von i auf $\mathfrak{I}$ gegebenen „Rechenregeln" in gewohnter Notierung aufzuschreiben, können wir dem Leser überlassen.

Über die im Fortsetzungsprinzip abstrahierten Eigenschaften hinaus wollen wir jetzt Folgerungen aus der speziellen Struktur von $\mathfrak{F}$ als Funktionenraum, von $\mathfrak{E}$ als den Treppenfunktionen mit speziellem Bezug zum Intervallsystem $\mathbb{S}$ und insbesondere aus der Monotonieeigenschaft (2b) behandeln. Sei zunächst f aus $\mathfrak{I}$ und (h_n) eine approximierende Folge in $\mathfrak{E}$, so sind auch die $|h_n|$ in $\mathfrak{E}$. Man hat nun

$$\Big|\, |h_n| - |f| \,\Big| \,\le\, |f - h_n|\,.$$

Daraus folgt mit (2b)

$$\big\|\, |h_n| - |f| \,\big\| \,\le\, \|f - h_n\|\,.$$

Daher strebt auch die linke Seite gegen 0, und man kann notieren:

Ist f Riemann-*integrierbar, so auch* $|f|$*. Supremum und Infimum endlich vieler* Riemann-*integrierbarer Funktionen sind wieder* Riemann-*integrierbar.*

Wegen der letzten Aussage erinnern wir noch einmal an die Darstellung von Supremum und Infimum von zwei Funktionen durch Linearkombinationen und Betrag.

Kapitel 1

Ergänzend zur ersten Aussage bemerken wir, daß nun auch für beliebiges integrierbares f die Eigenschaften (4) und (5), also

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\,dx = \|f\|$$

gelten. Hier ist nur das letzte ‚=' noch zu zeigen. Es ergibt sich in gewohnter Weise durch Grenzübergang aus der entsprechenden Gleichung in $\mathfrak{E}$ im Anschluß an die gerade durchgeführte Überlegung zur Integrierbarkeit von $|f|$. Unmittelbare Konsequenz ist:

i ist auch auf $\mathfrak{I}$ positiv und monoton.

Für $f \leq g$ in $\mathfrak{I}$ gilt also:

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx\,.$$

Ganz ähnlich verläuft nun die folgende Überlegung.

Ist f in $\mathfrak{E}$, also Treppenfunktion, und A ein beliebiges (hier auch nicht notwendig beschränktes) Intervall, so ist auch das Produkt $\chi_A f$ offenbar in $\mathfrak{E}$. Dies überträgt sich wieder auf f in $\mathfrak{I}$:

Ist f integrierbar und A beliebiges Intervall, so ist $\chi_A f$ integrierbar.

Den Beweis führt man, indem man eine approximierende Folge (h_n) in $\mathfrak{E}$ und die Ungleichung

$$\left|\chi_A f - \chi_A h_n\right| \leq |f - h_n|$$

verwendet.

Ist speziell $A = [a,\,b]$, so schreiben wir:

$$i(\chi_A f) =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Da Abänderung an endlich vielen Stellen als Addition einer Treppenfunktion mit dem Integralwert 0 interpretiert werden kann, bleibt die linke Seite unverändert, wenn man einen oder beide Endpunkte von A wegläßt. Die entsprechende Gleichung gilt also auch für beliebige Intervalle mit den Endpunkten a und b. Der Leser wird leicht bestätigen, daß die aus dem ‚klassischen Zugang' vertraute Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

für $a \leq b \leq c$ sich hier als unmittelbare Konsequenz daraus ergibt, daß die charakteristische Funktion einer disjunkten Vereinigung die Summe der charakteristischen Funktionen der einzelnen Mengen und i lineare Abbildung ist.

Vielfach wird man Funktionen zu betrachten haben, die nicht sofort auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, und deren Verhalten innerhalb eines im Definitionsbereich liegenden

Kapitel 1

Intervalls beschreiben wollen. Sei genauer $\mathbb{R} \supset D \supset A$, A Intervall und f auf D definierte reelle Funktion. Man erklärt dann naturgemäß $\widehat{f}$ in $\mathfrak{F}$ so, daß man $\widehat{f}(x) := f(x)$ in D und $\widehat{f}(x) := 0$ für x außerhalb D setzt. Dann kann man sagen: f heißt *„über A RIEMANN-integrierbar"*, wenn $\chi_A \widehat{f}$ RIEMANN-integrierbar ist. Die zuvor eingeführten Bezeichnungen wird man, falls A Intervall mit den Endpunkten a und b ist, sinngemäß übertragen:

$$i\left(\chi_A \widehat{f}\right) =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wir sind es dem Leser nun noch schuldig, deutlich zu machen, daß für eine außerhalb eines Intervalls $[a,\,b]$ verschwindende Funktion f die RIEMANN-Integrierbarkeit gemäß unserer Darstellung und diejenige nach dem klassischen Zugang (beliebig genaue Einschließung in Untersumme und Obersumme) — und die zugehörigen Integrale — übereinstimmen. Dies ist nicht mehr als eine einfache Übungsaufgabe, deren Durchführung wir hier aber darstellen wollen:

Wir gehen aus von der folgenden Zwischenbehauptung: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist die Existenz von außerhalb $[a,\,b]$ verschwindenden Treppenfunktionen g, h mit

$$(\times) \qquad g \leq f \leq h\,,\ \int_a^b (h(x) - g(x))\,dx < 2\varepsilon$$

äquivalent zur Existenz einer nicht notwendig außerhalb $[a,\,b]$ verschwindenden Treppenfunktion f_0 mit

$$(+) \qquad \|f - f_0\| < \varepsilon.$$

Gehen wir zum Beweis von $(\times)$ aus, so werden wir

$$(*) \qquad f_0 := \tfrac{1}{2}(h+g)$$

setzen und offenbar

$$|f - f_0| \leq \frac{1}{2}(h-g)$$

erhalten. Da die Treppenfunktion rechts einen Integralwert kleiner als ε hat, liefert dies nach Definition der RIEMANN-DARBOUX-Norm gerade die Aussage $(+)$. Ist umgekehrt $(+)$ mit einer beliebigen Treppenfunktion f_0 gegeben, so kann man wegen

$$\left|f - \chi_{[a,\,b]} f_0\right| \leq |f - f_0|$$

zunächst schon f_0 als außerhalb $[a,\,b]$ verschwindend annehmen. Dann bedeutet $(+)$ nach Definition eine Abschätzung

$$|f - f_0| \leq k,\quad \int_a^b k(x)\,dx < \varepsilon\,,$$

wobei man die Treppenfunktion k offenbar als außerhalb $[a,\,b]$ verschwindend wählen kann. Mit

$$g := f_0 - k,\ h := f_0 + k$$

hat man dann offenbar wieder $(\times)$.

Da nun die Existenz von g und h mit $(\times)$ und andererseits von f_0 mit $(+)$ zu beliebigem $\varepsilon > 0$ die beiden Definitionen von Integrierbarkeit liefern, ist damit deren Äquivalenz gezeigt.

Die Übereinstimmung der Integralwerte ergibt sich so: Einerseits liefert $(\times)$ für $(*)$ innerhalb der klassischen Einführung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_0(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

andererseits $(+)$ innerhalb des von uns dargestellten Zugangs

$$\left| \bar{\imath}(f) - \int_a^b f_0(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Daraus ist wieder die Gleichheit ablesbar. □

1.7 Integralnormen, Nullfunktionen und Nullmengen

Unsere Riemann-Darboux-Norm ist auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ nicht nur eine Pseudonorm, sondern zugleich gemäß (2b) noch monoton. Wir bezeichnen allgemein eine derart monotone Pseudonorm auf einem Funktionenraum als *„Integralnorm"*. Indem wir den Funktionenraum wieder mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen, gehen wir dafür also von den oben notierten Eigenschaften

(0) $\qquad \|\ \|\colon \mathfrak{F} \longrightarrow [0,\infty]\,,$

(1) $\qquad \|0\| = 0\,,$

(2) $\qquad |f| \le |f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n| \implies \|f\| \le \|f_1\| + \|f_2\| + \cdots + \|f_n\|,$

(3) $\qquad \|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad (0\cdot\infty := 0)$

aus.

Wir werden später auch auf die Homogenität (3) verzichten. Auch dann noch werden wir von einer (verallgemeinerten) „Integralnorm" sprechen und die hier zunächst betrachteten genauer als *„homogene Integralnormen"* bezeichnen.

Im folgenden wollen wir nun sogleich für irgendeine (homogene) Integralnorm auf unserem Raum $\mathfrak{F}$ der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ einige einfache Bezeichnungen und Zusammenhänge notieren.

Zunächst nennen wir *„Nullfunktion"* (zu der gegebenen Integralnorm $\|\ \|$) eine Funktion f mit $\|f\| = 0$. Die Menge der Nullfunktionen ist erkennbar ein Untervektorraum von $\mathfrak{F}$. Zudem sind offenbar der Betrag einer Nullfunktion und eine betragsmäßig durch eine Nullfunktion majorisierte Funktion wieder Nullfunktionen. Damit hat man dies entsprechend für Supremum und Infimum von endlich vielen Nullfunktionen.

Es ist uns nun vertraut, Mengen M innerhalb von $\mathbb{R}$ durch ihre charakteristischen Funktionen χ_M zu beschreiben. So liegt es nahe, eine Menge M in $\mathbb{R}$ als *„Nullmenge"* (wieder: bezüglich der gegebenen Integralnorm) zu bezeichnen, wenn eben χ_M Nullfunktion ist: $\|\chi_M\| = 0$. Man hat dann sofort: *Läßt sich eine Menge durch eine Vereinigung endlich vieler Nullmengen überdecken, so ist sie selbst eine Nullmenge.*

Wie wir sofort sehen werden, treten oft Mengen auf, die möglicherweise selbst nicht Nullmengen sind, sich aber durch *abzählbar viele* Nullmengen überdecken und damit auch als Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen darstellen lassen. Für solche Mengen verwenden wir die Bezeichnung *„Null-$*$-Mengen"*. (Die in diesem Zusammenhang gelegentlich verwendete Bezeichnung „abzählbare Nullmenge" ist ja doch wohl stark mißverständlich.)

Für eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir

$$\operatorname{Tr} f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

als ihre *„Trägermenge"* oder kurz auch den *„Träger"* von f. Von Interesse sind nun vielfach Aussagen über Funktionen und ihre Trägermengen im Zusammenhang mit Nullfunktionen und Nullmengen:

(i) *Ist eine Funktion beschränkt und ihr Träger Nullmenge, so ist die Funktion Nullfunktion.*

(ii) *Ist eine Funktion Nullfunktion und der Betrag der Funktion auf ihrem Träger positiv nach unten beschränkt, so ist der Träger Nullmenge.*

(iii) *Der Träger jeder Nullfunktion ist Null-$*$-Menge.*

Zum *Beweis* von (i) sei c aus $\mathbb{R}$ und $|f| \le c$. Dann hat man mit

$$|f| \le c \cdot \chi_{\operatorname{Tr} f}$$

durch Anwendung der Integralnorm die Behauptung. — Für (ii) sei mit $c > 0$ für alle x in $\operatorname{Tr} f$ jetzt $|f(x)| \ge c$. Dann hat man

$$\chi_{\operatorname{Tr} f} \le \frac{1}{c}|f|,$$

also in gleicher Weise die Behauptung. — Für (iii) wird man zu $c > 0$

$$M_c := \Big[|f| \ge c\Big] := \Big\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge c\Big\}$$

einführen. Dann sind die Funktionen $\chi_{M_c} f$, weil betraglich durch $|f|$ majorisiert, Nullfunktionen. Andererseits ist auf sie (ii) anwendbar. So sind die M_c Nullmengen, und offenbar ist $\operatorname{Tr} f$ die Vereinigungsmenge der abzählbar vielen Mengen $M_{1/n}$. □

Der Leser sollte sich klar machen, daß die Umkehrung zu (iii) im allgemeinen nicht gilt. Hier sei auf die Übungsaufgaben verwiesen, in denen unter anderem speziell im Zusammenhang mit der Riemann-Darboux-Norm und der Riemann-Integrierbarkeit diese und verwandte Fragen geklärt werden.

Die eben geschilderten Überlegungen bezogen sich auf eine beliebige Integralnorm auf unserem $\mathfrak{F}$, wobei der Leser noch die Verallgemeinerungsmöglichkeit auf andere Definitionsmengen anstatt $\mathbb{R}$ und sogar auf Funktionen mit Werten in einem normierten Vektorraum unschwer bestätigen wird. Demgegenüber wollen wir im folgenden einige ganz speziell auf die Riemann-Darboux-Norm bezogene einfache Feststellungen notieren.

Kapitel 1

(α) *M ist eine Nullmenge genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Intervalle $A_1, A_2, \cdots, A_n$ gibt mit*

$$M \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu) < \varepsilon\,.$$

(β) *Ist N eine Null-$*$-Menge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele offene Intervalle $A_1, A_2, \cdots$ mit*

$$N \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\,, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu) < \varepsilon\,.$$

(γ) *Jede endliche Menge ist eine Nullmenge.*

(δ) *Jede abzählbare Menge ist eine Null-$*$-Menge.*

(ε) *Ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ ist nicht Null-$*$-Menge.*

(η) *Ändert man eine* RIEMANN*-integrierbare Funktion f an den Punkten einer Nullmenge M so ab, daß die geänderte Funktion $\widehat{f}$ wieder beschränkt ist, so ist auch $\widehat{f}$ integrierbar mit gleichem Integralwert.*

Zu (α): Sei M Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es h aus $\mathfrak{E}$ mit

$$\chi_M \le h, \quad i(h) < \varepsilon\,.$$

Wir setzen dann

$$k(x) := \begin{cases} 1 & (\,h(x) \ge 1\,)\,, \\ 0 & (\,h(x) < 1\,)\,, \end{cases}$$

und haben immer noch

$$\chi_M \le k \le h, \quad \text{also} \quad i(k) < \varepsilon\,.$$

k ist charakteristische Funktion einer endlichen disjunkten Vereinigung von Intervallen. Durch entsprechend kleine Vergrößerung zu offenen Intervallen erhält man so eine Überdeckung der gewünschten Art zu ε. — Umgekehrt wählt man einfach

$$h := \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu}$$

und hat die Existenz von $h \in \mathfrak{E}$ mit

$$\chi_M \le h, \quad i(h) < \varepsilon\,.$$

Dies für jedes $\varepsilon > 0$ erweist M als Nullmenge.

Zu (β): Sei

$$N \subset \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} N_\kappa$$

mit Nullmengen N_κ und $\varepsilon > 0$. Dann wählt man zu jedem κ offene Intervallüberdeckungen

Kapitel 1

$$N_\kappa \subset \bigcup_{\nu=1}^{n_\kappa} A_{\kappa\nu}\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n_\kappa} \mu(A_{\kappa\nu}) < \frac{\varepsilon}{2^\kappa}$$

und hat so

$$N \subset \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{n_\kappa} A_{\kappa\nu}\,, \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n_\kappa} \mu(A_{\kappa\nu}) < \varepsilon\,.$$

Zu (γ) und (δ): Hier ist nur (γ) zu zeigen, was aber von den Treppenfunktionen her bekannt ist.

Zu (ε): Es genügt, ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ zu betrachten. Wir nehmen eine offene Intervallüberdeckung

$$[a, b] \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

an. Dann genügen nach dem Überdeckungssatz von HEINE-BOREL (Kompaktheit) endlich viele:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\,.$$

So hat man

$$\chi_{[a,\,b]} \le \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu}\,,$$

also durch Anwendung von i

$$b - a \le \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\,.$$

Dies zeigt, daß es für $\varepsilon \le b - a$ keine entsprechende Überdeckung gibt: $[a, b]$ ist nicht Null-$*$-Menge.

Zu (η): Hierzu ist nur zu bemerken, daß nach der oben notierten Feststellung (i) die Funktion $f - \widehat{f}$ Nullfunktion ist. □

. . . . Auslassung

1.8 Andere geeignete Integralnormen

Der Leser wird sich an den Ausgangspunkt unserer Gedanken zur Einführung des RIEMANN-Integrals erinnern: Ein Hauptziel war, die diesbezüglichen Methoden und Beweise — ohne Abstriche an Einfachheit für den speziellen Fall — möglichst weit verallgemeinerungsfähig zu formulieren. Dies ist uns in großem Umfang gelungen. Vieles Dargestellte basierte nur darauf, daß einerseits die RIEMANN-DARBOUX-Norm eine Integralnorm, also eine monotone Pseudonorm, auf unserem $\mathfrak{F}$ ist und andererseits für eine Fortsetzung des elementaren Integrals i *„geeignet“* ist: Es gilt die Abschätzung (4),

$$|i(h)| \le \|h\|$$

für h aus $\mathfrak{E}$.

In Fortführung dieses Gedankens wollen wir nun in den folgenden Abschnitten andere Integralbegriffe einfach mit Verwendung anderer geeigneter Integralnormen gewinnen.

So werden wir einmal das RIEMANN-Integral ausdehnen, indem wir von der Forderung beschränkter Funktionen auf beschränktem Träger abgehen, und eine weite Klasse *‚uneigentlich (absolut konvergent)* RIEMANN*-integrierbarer‘* Funktionen erhalten. Dies geschieht in einfacher und natürlicher Weise: Man geht von der RIEMANN-DARBOUX-Norm $\| \ \|$ aus und definiert für f aus $\mathfrak{F}$

$$\|f\|_\ell := \sup\{ \|h \wedge |f| \| \ : \ h \in \mathfrak{E} , \ h \geq 0 \} .$$

Wir bezeichnen dies auch als die der RIEMANN-DARBOUX-Norm zugeordnete *„lokale“* Integralnorm.

Weiter wollen wir auf ähnliche Weise das ‚LEBESGUE-*Integral*‘ gewinnen, das wegen seiner besonderen Eigenschaften in Verbindung mit Grenzprozessen für die Analysis, ihre Nebengebiete und Anwendungen weitgehend unverzichtbar ist. Die dieses Integral erzeugende geeignete Integralnorm erhalten wir auf folgende Weise:

Wir betrachten aufsteigende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen, deren Supremum $|f|$ majorisiert und bilden für jede solche Folge das Supremum der zugehörigen Integralwerte. Dann wird man versuchen, hierbei möglichst kleine Werte dieses Supremums zu erreichen. So erhält man die „LEBESGUE-*Norm*“ mit der Definition

$$\|f\|_L := \inf \Big\{ \sup i(h_n) : \ h_n \in \mathfrak{E} , 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq \sup h_n \geq |f| \Big\} .$$

Eine dritte, sehr einfache, aber auch nicht sehr weit führende, Möglichkeit wird vielen Lesern bekannt sein:

Wenn man sich auf ein Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ als gemeinsamen Definitionsbereich an Stelle von $\mathbb{R}$ beschränkt, so kann auf den dort definierten Funktionen

$$\|f\|_s := (b-a) \cdot \sup \Big\{ |f(x)| \ : \ x \in [a, b] \Big\}$$

gewählt werden. Diese Integralnorm erweist sich als geeignet zur Fortsetzung des elementaren Integrals von Treppenfunktionen auf $[a, b]$. Man erhält die *Integrale der* sogenannten *„Regelfunktionen“* auf $[a, b]$.

Unsere Leser werden schon an dieser Stelle sehen, daß es recht einfach ist, im ersten und vor allem im dritten Falle das Vorliegen einer ‚geeigneten Integralnorm‘ zu erkennen, während im Falle der LEBESGUE-Norm gewisse Zusatzüberlegungen erforderlich sind. Wir verschieben jedoch diese Überlegungen auf den Zusammenhang der jeweiligen folgenden Abschnitte.

Vorwegnehmen möchten wir jedoch eine einfache Betrachtungsweise, die einen Vergleich verschiedener Integralerweiterungen ermöglicht:

Vergleichsprinzip:

Es seien $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf $\mathfrak{F}$ definierte Integralnormen. $\| \ \|_2$ sei überdies für die Fortsetzung von i auf $\mathfrak{E}$ geeignet. Schließlich gelte für f aus $\mathfrak{F}$

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_1 .$$

Dann ist offenbar auch $\| \ \|_1$ eine geeignete Integralnorm. Bezeichnet man die Räume der zugehörigen integrierbaren Funktionen mit $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$, ebenso die erhaltenen Integralfortsetzungen mit i_1 und i_2, so gelten

$$\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2$$

und darüber hinaus: i_2 ist Fortsetzung von i_1.

Hat man nämlich f aus $\mathfrak{I}_1$ und eine zugehörige approximierende Folge (h_n) aus $\mathfrak{E}$, so erhält man

$$\|h_n - f\|_2 \leq \|h_n - f\|_1 \longrightarrow 0 .$$

Dies zeigt: h_n ist auch approximierende Folge bezüglich $\| \ \|_2$. So hat man, was zunächst zu zeigen war, f aus $\mathfrak{I}_2$. Andererseits konvergiert die Folge der Integralwerte $i(h_n)$ sowohl gegen $i_1(f)$ als auch gegen $i_2(f)$, was die zweite Behauptung ergibt. □

Dies Prinzip wird unten unmittelbar erkennen lassen, daß das LEBESGUE-Integral das angegebene uneigentliche RIEMANN-Integral und dies wiederum das ‚eigentliche‘ RIEMANN-Integral fortsetzt. Bei Beschränkung auf die Funktionen auf $[a, b]$ wird sich zudem noch das Integral von Regelfunktionen als Einschränkung des RIEMANN-Integrals erweisen.

Das Vergleichsprinzip haben wir hier in einer den späteren Anwendungen nahen Formulierung notiert. Man bemerkt natürlich sofort, daß es allgemein im Rahmen einer Fortsetzung mit geeigneten Pseudonormen gilt.

1.9 Integral von Regelfunktionen

Bei der ersten Einführung in die Analysis, deren Schwerpunkte die Rechenmethoden der Differential- und Integralrechnung darstellen, ist man oftmals bestrebt, möglichst rasch zu einer Integraldefinition für eine Klasse von Funktionen zu gelangen, die wenigstens die wichtigsten umfaßt. Hier verwendet man oft die Idee, das elementare Integral von Treppenfunktionen durch gleichmäßige Konvergenz auf einem kompakten Intervall fortzusetzen. Dies ist im Grunde das einfachste Beispiel für die von uns vielfältig verwendete Methodik.

Man muß sich dazu beschränken auf ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die dort definierten reellwertigen Funktionen $\mathfrak{F}[a, b]$, die dort definierten Treppenfunktionen $\mathfrak{E}[a, b]$ und deren elementares Integral, das wir wieder i nennen. Dann liefert

$$\|f\|_s := (b-a) \cdot \sup \Big\{ |f(x)| \ : \ x \in [a, b] \Big\}$$

eine geeignete Integralnorm, die überdies definit ist und auf den beschränkten Funktionen eine Norm wird. (Der Leser möge dies, wenn nötig, übungshalber bestätigen.) In diesem Falle sind die erzeugten integrierbaren Funktionen — wir bezeichnen den Vektorraum mit $\mathfrak{I}_s$, wobei wir die Notierung der Abhängigkeit vom Intervall hier und im folgenden oft fortlassen — die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen. Diese integrierbaren Funktionen lassen sich auch durch die Eigenschaft kennzeichnen, daß an jeder Stelle von $[a,\, b]$, soweit sinnvoll, die rechtsseitigen und linksseitigen Limites existieren. Für Leser, denen dies nicht vertraut ist, haben wir den Sachverhalt in den Übungen noch einmal formuliert und dazu eine Anleitung gegeben.

Wir bestätigen nun unmittelbar, daß für eine beschränkte Funktion f auf $[a,\, b]$

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\, dx \;\le\; (b-a)\cdot \sup\Big\{ \big|f(x)\big| \;:\; x \in [a,\, b] \Big\}$$

gilt. So hat man im Vergleich zur RIEMANN-DARBOUX-Norm, sinngemäß eingeschränkt auf Funktionen über $[a,\, b]$, die Ungleichung

$$\|f\| \;\le\; \|f\|_s\, .$$

Unser zuvor festgehaltenes Vergleichsprinzip läßt also erkennen:

Das RIEMANN*-Integral für Funktionen auf* $[a,\, b]$ *ist eine Fortsetzung des eben geschilderten Integrals von Regelfunktionen.*

Änderung

An dieser Stelle sollten wir auf einen gravierenden Nachteil dieses Integralbegriffs hinweisen: Es ist keine sinnvolle Übertragung ins Mehrdimensionale möglich ist. Hierbei würde schon im Zweidimensionalen eine so einfache Funktion wie die charakteristische Funktion der Einheitskreisscheibe nicht mehr integrierbar sein. Wir verweisen wieder auf eine einschlägige Übungsaufgabe.

1.10 Uneigentliches Riemann-Integral

Unsere Leser werden schon aus ihrem ersten Kontakt mit der Analysis, und zwar im Anschluß an die elementare Integralrechnung, den Wunsch kennen, von der Beschränkung auf Integrale nur für beschränkte Funktionen mit beschränktem Träger abzugehen. So möchte man doch etwa

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

schreiben, obwohl hier die Funktion bei 1 nicht beschränkt ist, oder

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

notieren können, auch wenn es sich hier um eine Funktion mit nicht beschränktem Träger handelt. Anschaulich möchte man so auch gewissen unbeschränkten Flächen einen ‚Inhalt' zuordnen. Der Leser weiß sicher auch, daß man hier und in ähnlichen Fällen analytisch streng die Limes-Definitionen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;:=\; \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \;:=\; \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{1+x^2}$$

gibt. Auf Derartiges beschränken sich nun fast alle einführenden Darstellungen. Es wird eben nur dem RIEMANN-Integral in bestimmten einfachen Fällen noch ein Limesprozeß aufgesetzt. Bei mehreren ‚Singularitäten' hat man schon Definitions- und Bezeichnungsschwierigkeiten, so daß dann auch nicht einmal Summen mehrerer solcher Funktionen mit verschiedenen Singularitäten einfach betrachtet werden können.

Wir werden nun im folgenden zeigen, daß die oben schon notierte einfache *(lokale)* Modifikation der RIEMANN-DARBOUX-Norm gemäß der von uns geschilderten allgemeinen Methodik in ganz natürlicher Weise eine Fortsetzung des RIEMANN-Integrals liefert, die weitgehenden Wünschen nach Einbeziehung von Funktionen ohne Schranken und ohne beschränkten Träger gerecht wird. Nur eine Einschränkung gilt dabei: Nicht alle Limites der oben besprochenen Art werden einzuordnen sein, sondern genau nur solche, bei denen der entsprechende Grenzwert auch existiert, wenn man die Funktion durch ihren Betrag ersetzt. Dies ist aber eine ganz naturgemäße Einschränkung. Denn, wenn man sie fallen ließe, würden entsprechende Limites bei verschiedenartiger Durchführung eines Grenzübergangs verschieden ausfallen können. Dies entspricht dem bekannten Sachverhalt, daß eine nicht absolut, sondern nur bedingt konvergente Reihe bei Umordnung eine andere Reihensumme erhalten oder auch divergent werden kann. Wir verweisen wieder auf eine Übungsaufgabe hierzu.

Wir gehen nun aus von der RIEMANN-DARBOUX-Norm, die wir hier mit $\|\;\|_R$ bezeichnen wollen. Ist f beschränkt mit beschränktem Träger und $[a,\, b]$ ein endliches Intervall, das $\operatorname{Tr} f$ enthält, so wird also

$$\|f\|_R \;=\; \overline{\int_a^b} \big|f(x)\big|\, dx\, .$$

Für die Gewinnung des normalen oder ‚eigentlichen' RIEMANN-Integrals hatten wir nun einfach Funktionen, die nicht beschränkt mit beschränktem Träger sind, den Wert $\|f\|_R \;:=\; \infty$ zugeordnet. Hier gehen wir etwas anpassungsfähiger vor und betrachten bei beliebigem f aus $\mathfrak{F}$ die ‚Beschneidungen' $h \wedge \big|f\big|$ der Betragsfunktion durch nicht-negative Treppenfunktionen h — wir schreiben $h \in \mathfrak{E}^+$ —, die natürlich beschränkt mit beschränktem Träger sind. So liegt es nahe, fürs Folgende

$$\|f\| \;:=\; \sup\Big\{ \|h \wedge \big|f\big|\,\|_R \;:\; h \in \mathfrak{E}^+ \Big\}$$

einzuführen. Wir stellen fest:

$\|\;\|$ *ist eine Integralnorm auf* $\mathfrak{F}$. *Für beschränkte Funktionen* f *mit beschränktem Träger, also speziell für Treppenfunktionen und auch für ‚eigentlich'* RIEMANN*-integrierbare Funktionen, gilt:*

$$\|f\| \;=\; \|f\|_R\,.$$

Damit ist also $\|\;\|$ *eine für die Fortsetzung des elementaren Integrals von Treppenfunktionen geeignete Integralnorm. Man hat für alle* f *aus* $\mathfrak{F}$

$$\|f\| \;\le\; \|f\|_R\,.$$

Wir bestätigen zum *Beweise* zunächst die letzte Aussage mit dem Hinweis auf die Monotonie von $\|\;\|_R$. Dann ergibt sich die zweite Behauptung mit der Bemerkung, daß es in diesem Fall ein h aus $\mathfrak{E}^+$ mit $h \wedge |f| \;=\; |f|$ gibt. Damit sind die Eigenschaften (1) und (4) unmittelbar gegeben. Für (2) verwendet man, daß eine Ungleichung

$$|f| \;\le\; |f_1| + \cdots + |f_n|$$

die entsprechende Ungleichung für die ‚Beschneidungen',

$$h \wedge |f| \;\le\; h \wedge |f_1| + \cdots + h \wedge |f_n|\,,$$

mit beliebigem h aus $\mathfrak{E}^+$ nach sich zieht. Man wendet hierauf die ‚Subadditivität', also (2), von $\|\;\|_R$ an und erhält, indem man zuerst rechts und dann links zu den Suprema übergeht, die Subadditivität (2) für $\|\;\|$. Die ‚Homogenität' (3) folgt mit Beachtung von

$$(|\alpha|\,h) \wedge |\alpha f| \;=\; |\alpha|\,(h \wedge |f|). \qquad \square$$

Nach diesen Feststellungen ist unser Fortsetzungsprinzip anwendbar. Wir bezeichnen die Funktionen des so erhaltenen $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathfrak{I}$ als *„uneigentlich* RIEMANN*-integrierbar"*, wobei wir, falls mißverständlich, *„absolut konvergent"* hinzusetzen. Entsprechend wird $\bar{\imath}$, das wir auch hier weiterhin mit i bezeichnen, *„uneigentliches* RIEMANN*-Integral"* genannt. Die Bezeichnung ist zulässig; denn nach der letzten Ungleichung oben ist das Vergleichsprinzip anwendbar:

Das uneigentliche RIEMANN*-Integral ist Fortsetzung des ‚eigentlichen'* RIEMANN*-Integrals.*

Wir bezeichnen in diesem Zusammenhang die Menge der eigentlich RIEMANN-integrierbaren Funktionen mit $\mathfrak{I}_R$ und schließen sogleich die Feststellung an:

$$\mathfrak{I}_R \;=\; \mathfrak{I} \cap \mathfrak{F}_b\,,$$

wobei wir hier und im folgenden mit $\mathfrak{F}_b$ den Unterraum von $\mathfrak{F}$ der beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger bezeichnen. Zum *Beweis* ist ‚$\subset$' klar. Sei andererseits f im Durchschnitt von $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{F}_b$ und (h_n) eine approximierende Folge in $\mathfrak{E}$ bezüglich $\|\;\|$, so sind $h_n - f$ in $\mathfrak{F}_b$, also aufgrund einer oben notierten Feststellung

$$\|h_n - f\|_R \;=\; \|h_n - f\| \;\longrightarrow\; 0\,,$$

was $f \in \mathfrak{I}_R$ zeigt. $\square$

Auch für unsere uneigentlich RIEMANN-integrierbaren Funktionen werden wir gelegentlich

$$i(f) \;=:\; \int f(x)\,dx \;=:\; \int_a^b f(x)\,dx$$

schreiben, wobei für die letzte Bezeichnung angenommen wird, daß der Träger von f in einem (beliebigen) Intervall mit den Grenzen a, b mit $-\infty \le a \le b \le +\infty$ liegt. Darüber hinaus werden wir wieder für Funktionen f, deren Definitionsbereich ein solches Intervall umfaßt,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; i\Big(\widehat{f}\,\Big)$$

erklären, wenn $\widehat{f}$ die Einschränkung der Funktion f auf das betrachtete Intervall außerhalb des Intervalls mit den Werten 0 fortsetzt und diese Funktion uneigentlich RIEMANN-integrierbar ist.

Zusammenfassend wollen wir im folgenden die Grundeigenschaften des gewonnenen uneigentlichen RIEMANN-Integrals festhalten. Sie ergeben sich aufgrund der Integralnorm-Eigenschaft, die die Monotonie einschließt, und der Beziehung der Treppenfunktionen zu den Intervallen vollständig im Rahmen der Überlegungen, wie wir sie im Hinblick auf Verallgemeinerungen schon oben bei der Behandlung des eigentlichen RIEMANN-Integrals durchgeführt haben:

Das uneigentliche RIEMANN*-Integral* i *stellt eine lineare Abbildung des* $\mathbb{R}$*-Vektorraumes* $\mathfrak{I}$ *in* $\mathbb{R}$ *dar. Ist die Funktion* f *uneigentlich* RIEMANN*-integrierbar, so auch* $|f|$ *und, falls* A *(auch unbeschränktes) Intervall ist, auch* $\chi_A f$. $\mathfrak{I}$ *ist wieder abgeschlossen gegenüber Bildung endlicher Suprema und Infima. Für* f *aus* $\mathfrak{I}$ *gilt ebenfalls*

$$\|f\| \;=\; i(|f|) \;<\; \infty\,.$$

Daher ist auch das uneigentliche RIEMANN*-Integral positiv und monoton.*

Sehr nützlich ist oft die Bemerkung, daß man zur Gewinnung unserer Integralnorm nicht die Beschneidungen mit sämtlichen nicht-negativen Treppenfunktionen h heranzuziehen braucht. Wegen der Monotonie der RIEMANN-DARBOUX-Norm genügt es offenbar, Teilmengen $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{E}^+$ zu betrachten, die zu jeder beliebigen Funktion aus $\mathfrak{E}^+$ eine majorisierende enthalten. Wir bezeichnen solche Mengen $\mathfrak{M}$ nicht-negativer Treppenfunktionen als *„majorisierende Mengen"*. Eine spezielle Rolle werden abzählbare majorisierende Mengen spielen, die durch geeignete nichtfallende Folgen gegeben sind. In diesem Falle sprechen wir von *„majorisierenden Folgen"*. Häufig benutzt wird die offenbar majorisierende Folge der Funktionen

$$h_n \;:=\; n\,\chi_{[-n,\,n]}\,.$$

Für eine beliebige majorisierende Menge $\mathfrak{M}$ gilt **ausführen!**

$$\|f\| \;=\; \sup\Big\{\|h \wedge |f|\,\|_R \;:\; h \in \mathfrak{M}\Big\}$$

und für eine beliebige majorisierende Folge (h_n)

$$\|h_n \wedge |f|\,\|_R \;\uparrow\; \|f\|\,.$$

In diesem Zusammenhang verabreden wir noch eine bequeme Sprechweise für einen häufig zu beschreibenden Sachverhalt: Eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ wird als *„$\mathfrak{E}$-lokal* RIEMANN*-integrierbar"* bezeichnet, wenn für jede Treppenfunktion $h \;\ge\; 0$ die *„Beschneidung von* f *mit* h*"*,

$$h \circledwedge f \;:=\; (-h) \vee (h \wedge f) \;=\; h \wedge ((-h) \vee f) \;=\; (h \wedge |f|)\,\mathrm{sign}\, f\,,$$

die sich der Leser auf jeden Fall eingehend veranschaulichen sollte, (eigentlich) RIEMANN-integrierbar ist. Auch hier genügt wieder die Forderung, daß dies für die Funktionen h aus einer majorisierenden Menge oder Folge gilt.

Sehr einfach läßt sich nun formulieren:

Integrierbarkeitskriterium und Limessatz:

Eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ ist genau dann uneigentlich RIEMANN*-integrierbar, wenn sie $\mathfrak{E}$-lokal* RIEMANN*-integrierbar ist und $\|f\| < \infty$ gilt. In diesem Falle gilt mit jeder majorisierenden Folge (h_n)**

$$i(h_n \circledwedge f) \longrightarrow i(f)\,.$$

Hier wird offenbar das möglicherweise echt uneigentliche RIEMANN-Integral von f als Limes von eigentlichen RIEMANN-Integralen erhalten. In Verbindung mit dem Kriterium hat man es so mit der wichtigsten Berechnungsmethode für uneigentliche RIEMANN-Integrale zu tun. Hierzu verweisen wir auf die ausführliche Behandlung dieser Dinge an Hand einiger Beispiele in den Übungen.

Zum *Beweis* des Kriteriums ist zunächst wegen der notierten Grundeigenschaften die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung offensichtlich. Daß diese hinreichend ist, zeigen wir zusammen mit der Limes-Aussage auf folgende Weise: Wir gehen aus von der Gleichung

$$(*) \qquad k \wedge \big|f - h \circledwedge f\big| \;=\; \big((k+h) \wedge |f|\big) - \big(h \wedge |f|\big)$$

mit h, k aus $\mathfrak{E}^+$, die der Leser punktweise mit Beachtung von

$$\big|f - h \circledwedge f\big| \;=\; |f| - h \wedge |f|$$

durch geeignete Fallunterscheidung bestätigen möge. Ist nun f eine $\mathfrak{E}$-lokal RIEMANN-integrierbare Funktion, so sind die drei Funktionen in $(*)$ eigentlich RIEMANN-integrierbar. Durch Anwendung von i erhält man, da die Funktionen nichtnegativ sind,

$$\big\|k \wedge \big|f - h \circledwedge f\big|\,\big\|_R \;=\; \big\|(k+h) \wedge |f|\,\big\|_R - \big\|h \wedge |f|\,\big\|_R\,.$$

Indem man zum Supremum bezüglich k übergeht, folgt

$$\|f - h \circledwedge f\| \;=\; \|f\| - \big\|h \wedge |f|\,\big\|_R\,.$$

Hieraus sind unsere Behauptungen einfach ablesbar. □

Auslassung

....

Aus diesem Kriterien ergibt sich bequem das als praktisches, sehr zugkräftiges Hilfsmittel oft zu verwendende

Majorantenkriterium:

Ist eine Funktion g uneigentlich RIEMANN*-integrierbar, ist die Funktion f $\mathfrak{E}$-lokal* RIEMANN*-integrierbar und betraglich durch g majorisiert, $|f| \le |g|$, so ist auch f uneigentlich* RIEMANN*-integrierbar.*

* Es genügt offenbar eine nicht-fallende Folge aus $\mathfrak{E}^+$, die im Supremum $|f|$ übertrifft.

Für einige häufig nützliche Vergleichsfunktionen und die einschlägige Beweistechnik verweisen wir auf unsere Übungen.

....

Auslassung

1.11 Das Lebesgue-Integral

Das eben eingeführte uneigentliche RIEMANN-Integral, das, wie wir sahen, den bisher umfassendsten Raum integrierbarer Funktionen lieferte, ist durchaus für einen großen Bereich von Anwendungen ausreichend. Es zeigt jedoch gravierende Mängel im Zusammenhang mit der wünschenswerten und vielfältig auch für praktische Anwendungen notwendigen Betrachtung von Grenzprozessen bezüglich der Funktionen.

So muß nicht einmal dann, wenn die RIEMANN-integrierbaren Funktionen f_n eine gemeinsame Schranke besitzen und die Träger in einem festen kompakten Intervall liegen, ein existierender punktweiser Limes f wieder RIEMANN-integrierbar sein: Standardbeispiel ist die charakteristische Funktion der Menge der rationalen Zahlen aus $[0,\,1]$ als (punktweiser) Limes charakteristischer Funktionen endlicher Mengen.

Auch ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum der uneigentlich RIEMANN-integrierbaren Funktionen bezüglich der Integralnorm $\|\ \|$, die wir eingeführt hatten, nicht, was viele ‚funktionalanalytische' Betrachtungen (z. B. auch für die Quantentheorie) vereinfachen würde, *„vollständig"*: Es kann eine Folge (f_n) aus diesem Raum CAUCHY-Folge sein, d. h.

$$\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0 \quad (n,\,m \longrightarrow \infty)$$

gelten, ohne daß es eine Funktion f in diesem Raum gibt, gegen die die Folge bezüglich der Integralnorm konvergiert, d. h.

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Dies ist nicht ganz so unmittelbar zu erkennen; wir verweisen auf den übernächsten Abschnitt.

Mit diesen Bemerkungen hängt die Feststellung zusammen, daß im bisherigen Rahmen die Beziehungen zwischen Nullmengen, Null-$*$-Mengen und Nullfunktionen, auch hinsichtlich der Möglichkeit entsprechend weitgehender Abänderung von Funktionen ohne Veränderung von Integrierbarkeit und Integral, nicht so einfach sind, wie dies wünschenswert wäre.

Allen diesen Wünschen genügt nun das „LEBESGUE-*Integral*", das das uneigentliche RIEMANN-Integral noch umfaßt und *den* Integralbegriff für das analytische Arbeiten darstellt. Wir wollen im folgenden zeigen, daß man nur im Zusammenhang mit der Definition und den Eigenschaften einer geeignet einzuführenden neuen Integralnorm wenig mehr von der ‚Topologie' der reellen Zahlen zu investieren braucht, um danach diesen Integralbegriff auf die gleiche einfache Weise wie die bisherigen, ja bezüglich der Eigenschaften oft noch einfacher, zu erhalten.

Zu diesem Zweck notieren wir zunächst den

Satz von Dini:

Die Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ seien auf dem kompakten Intervall $[a, b]$,oberhalb halbstetig'. Sie mögen punktweise absteigend $\big(f_n \geq f_{n+1}\big)$ gegen 0 konvergieren. Dann ist die Konvergenz gegen 0 gleichmäßig.

Dabei heißt eine reelle Funktion f *„oberhalb halbstetig"* in $[a, b]$, wenn für jedes $x_0 \in [a, b]$ und jedes $K > f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 derart existiert, daß für alle $x \in U \cap [a, b]$ auch $K > f(x)$ gilt.

Manche unserer Leser werden eine entsprechende Fassung des Satzes von Dini mit stetigen Funktionen f_n kennen und sofort bemerken, daß der Beweis nur die Halbstetigkeit benötigt:

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz gegen 0 gilt dann

$$[a, b] \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n \,<\, \varepsilon]\,.$$

Wegen der Halbstetigkeit sind die Mengen

$$[f_n \,<\, \varepsilon] \;:=\; \big\{\, x \,\in\, [a, b] \,:\, f_n(x) \,<\, \varepsilon \,\big\}$$

relativ-offen, d. h. Durchschnitte von offenen Mengen mit $[a, b]$. Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel genügen also endlich viele dieser Mengen zur Überdeckung: Es gibt ein N mit

$$[a, b] \;=\; \bigcup_{n=1}^{N} [f_n \,<\, \varepsilon] \;=\; [f_N \,<\, \varepsilon]\,,$$

wobei die letzte Aussage aus der Monotonie bezüglich n folgt. Diese ergibt dann auch $f_n(x) \leq f_N(x) < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und alle $n \geq N$. $\square$

Die angegebene einfache Form des Satzes von Dini verwenden wir nun für einen relativ kurzen Beweis einer Eigenschaft der Integrale von Treppenfunktionen, in der schon alles ,Topologische' konzentriert ist, das für eine recht elementare Einführung des Lebesgue-Integrals benötigt wird, nämlich quasi eine ,Keimzelle' der später dann schnell herleitbaren starken Konvergenzsätze:

Haupthilfssatz:

Die Treppenfunktionen h_n $(n \in \mathbb{N})$ (auf $\mathbb{R}$) mögen punktweise absteigend $\big(h_n \geq h_{n+1}\big)$ gegen 0 konvergieren. Dann gilt

$$i(h_n) \downarrow 0 \quad (\, n \,\to\, \infty\,)\,.$$

Zum *Beweis* bemerken wir vorweg, daß wegen der Monotonie bezüglich n mit einem festen kompakten Intervall $[a, b]$

$$\mathrm{Tr}\, h_n \;\subset\; \mathrm{Tr}\, h_1 \;\subset\; [a, b]$$

gilt und daß h_1 und damit alle h_n beschränkt sind:

$$h_n \;\leq\; h_1 \;\leq\; M \;>\; 0\,.$$

Sei dann $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir schließen die Sprungstellen aller h_n ein in abzählbar viele offene Intervalle A_k $(n \in \mathbb{N})$ derart, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \;<\; \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Dabei mögen $A_1, \cdots, A_{k_1}$ die Sprungstellen von h_1 und weiter allgemein $A_{k_{n-1}+1}$, $\cdots$, A_{k_n} diejenigen Sprungstellen von h_n einschließen, die nicht schon bei einem h_m mit $m < n$ auftraten. Wir ändern dann die Treppenfunktionen h_n in der Weise ab, daß wir ihre Werte für die Punkte von

$$\bigcup_{k=1}^{k_n} A_k$$

zu 0 definieren und sonst unverändert lassen. Dann sind die abgeänderten Funktionen $\widehat{h}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ offenbar oberhalb halbstetige Treppenfunktionen, die immer noch absteigend gegen 0 konvergieren. Andererseits gibt die konstruierte Abänderung nur eine Integralabweichung mit

$$(*) \qquad i(\widehat{h}_n) \,+\, \tfrac{\varepsilon}{2} \,>\, i(h_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nun wenden wir den Satz von Dini auf die $\widehat{h}_n$ und $[a, b]$ an. Wir erhalten mit der gleichmäßigen Konvergenz für alle hinreichend großen n

$$i(\widehat{h}_n) \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher aufgrund von $(*)$

$$i(h_n) \;<\; \varepsilon.$$

Das war die Behauptung. $\square$

Wir definieren nun für $f \in \mathfrak{F}$

$$\|f\| \;:=\; \inf\Big\{\sup\, i(h_n) \;:\; h_n \in \mathfrak{E}^+,\, h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq \sup h_n \geq \big|f\big|\Big\}$$

und bezeichnen dies als „Lebesgue-*Norm*". Gelegentlich schreiben wir genauer auch $\|\ \|_L$. Im Vergleich zur Riemann-Darboux-Norm, für die versucht wird, $|f|$ durch *eine* Treppenfunktion mit möglichst kleinem Integralwert zu majorisieren, wird jetzt also $|f|$ durch aufsteigende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen, was stets möglich ist, so majorisiert, daß dabei das Supremum der Integralwerte möglichst klein wird.

Wir erhalten die folgenden Eigenschaften:

$$(0) \qquad \|\ \|\colon\ \mathfrak{F} \longrightarrow [\,0\,,\,\infty\,],$$

$$(1) \qquad \|0\| \;=\; 0,$$

$$(2+) \qquad \big|f\big| \;\leq\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \big|f_\nu\big| \;\Longrightarrow\; \|f\| \;\leq\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|,$$

$$(3) \qquad \|\alpha \cdot f\| \;=\; \big|\alpha\big| \cdot \|f\| \quad (\,0\,\cdot\,\infty \;:=\; 0\,).$$

Speziell für $h \,\in\, \mathfrak{E}$ gilt

$$(4) \qquad \big|i(h)\big| \;\leq\; \|h\|,$$

Kapitel 1

(5) $$\|h\| \;=\; i(|h|).$$

Dabei sind (0) und (1) unmittelbar gegeben. — Für (2+) genügt es, die Summe rechts als $<\infty$ anzunehmen, womit speziell alle Summanden endlichwertig sind. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ hat man dann zu jedem ν geeignete $h_{\nu n} \in \mathfrak{E}^+$ mit

$$h_{\nu 1} \le h_{\nu 2} \le \cdots \le \sup_n h_{\nu n} \ge |f_\nu|, \quad i(h_{\nu n}) < \|f_\nu\| + \frac{\varepsilon}{2^\nu}\,.$$

Man kann dann etwa

$$h_n := h_{1n} + h_{2n} + \cdots + h_{nn}$$

bilden und hat offenbar

$$h_1 \le h_2 \le \cdots \le \sup_n h_n \ge |f|, \quad i(h_n) < \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\| + \varepsilon\,,$$

was die Behauptung erkennen läßt. — Für (3) genügt es, $\beta = |\alpha| > 0$ zu betrachten und nur ‚$\le$' zu zeigen. Das aber folgt mit der Überlegung, daß aus $h_1 \le h_2 \le \cdots \le \sup h_n \ge |f|$ sich $\beta h_1 \le \beta h_2 \le \cdots \le \sup \beta h_n \ge |\alpha f|$ ergibt, wobei $\sup i(\beta h_n) = \beta \sup i(h_n)$ gilt. — Entscheidend für die Möglichkeit einer Integralfortsetzung mit dieser Integralnorm ist nun (5). Zum *Beweis* sei $k := |h| \in \mathfrak{E}^+$. Da man h_n durch $k \wedge h_n$ ersetzen kann, genügt es, in der Definition von $\|h\|$ anzunehmen, daß $h_n \uparrow k$, und dann $i(h_n) \uparrow i(k)$ zu zeigen. Das aber ergibt sich gerade aus unserem Haupthilfssatz, den man auf die Funktionen $k - h_n$ anwendet. — Schließlich folgt (4) bekanntlich aus (5). □

Die LEBESGUE-Norm $\|\ \|$ ist also eine Integralnorm auf $\mathfrak{F}$, die zur Fortsetzung von i geeignet ist. (Wir sahen übrigens im Beweis, daß diese letzte Eigenschaft genau die Aussage unseres Haupthilfssatzes bedeutet.) Im Gegensatz zur RIEMANN-DARBOUX-Norm ist diese Integralnorm gemäß (2+) nicht nur endlich-subadditiv, sondern *„abzählbar-subadditiv"* oder, wie man auch sagt, *„total-subadditiv"* oder *„σ-subadditiv"* oder *„stark"*. Dies wird die entscheidenden Vorteile des LEBESGUE-Integrals bringen.

Ergänzung

Wir bemerken dazu:

Die LEBESGUE-Norm ist die größte σ-subadditive Integralnorm auf $\mathfrak{F}$, die auf $\mathfrak{E}$ mit dem Integral des Betrages übereinstimmt.

Dies ergibt sich sofort, indem man in der Definition umschreibt

$$\sup h_n \;=\; h_1 + (h_2 - h_1) + (h_3 - h_2) + \cdots\,,$$

$$\sup i(h_n) \;=\; \|h_1\| + \|h_2 - h_1\| + \|h_3 - h_2\| + \cdots\,. \qquad \square$$

Wir können nun das oben herausgestellte Fortsetzungsprinzip und die schon entwickelte Methodik bei der Integralerweiterung mit Integralnormen auf das elementare Integral i auf dem Raum der Treppenfunktionen, $\mathfrak{E}$, und die LEBESGUE-Norm anwenden. Wir erhalten einen $\mathfrak{E}$ umfassenden $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathfrak{I}$ von Funktionen, die wir jetzt als „LEBESGUE-*integrierbar*" bezeichnen, und eine wieder mit i bezeichnete Integralfortsetzung, die natürlich „LEBESGUE-*Integral*" genannt wird. Wir werden wieder oft

Kapitel 1

$$i(f) \;=:\; \int f(x)\,dx \;=:\; \int_a^b f(x)\,dx$$

schreiben, wobei für die letzte Bezeichnung angenommen wird, daß der Träger von f in einem (beliebigen) Intervall mit den Grenzen a und b $(-\infty \le a \le b \le +\infty)$ liegt. Auch für Funktionen, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, verfahren wir wieder wie beim eigentlichen oder uneigentlichen RIEMANN-Integral.

Das LEBESGUE-Integral i stellt eine lineare Abbildung von $\mathfrak{I}$ in $\mathbb{R}$ dar. Mit f ist auch $|f|$ und, falls A (auch unbeschränktes) Intervall ist, $\chi_A f$ LEBESGUE-integrierbar. $\mathfrak{I}$ ist abgeschlossen gegen Bildung endlicher Suprema und Infima. Für f aus $\mathfrak{I}$ gilt

$$\|f\| \;=\; i(|f|) \;<\; \infty\,.$$

Das LEBESGUE-Integral ist daher positiv und monoton.

Ebenfalls ohne Verwendung von (2+) an Stelle von (2) können wir hier feststellen:

Das LEBESGUE-Integral ist eine Fortsetzung des eigentlichen RIEMANN-Integrals.

Allgemein gilt nämlich:

Ist $\|\ \|$ eine Integralnorm auf $\mathfrak{F}$, die auf $\mathfrak{E}$ mit dem Integral des Betrages übereinstimmt, so gilt im Vergleich zur RIEMANN-DARBOUX-Norm $\|\ \|_R$ für alle f aus $\mathfrak{F}$

$$\|f\| \;\le\; \|f\|_R\,.$$

Ist nämlich h Treppenfunktion und $h \ge |f|$, so hat man

$$\|f\| \;\le\; \|h\| \;=\; i(h)$$

und durch Bildung des Infimums rechts die Behauptung.

Änderung

Diese Bemerkung gibt nun den Beweis für unsere oben behauptete Fortsetzungseigenschaft einfach aufgrund des allgemein notierten Vergleichsprinzips. *Das LEBESGUE-Integral umfaßt* auch noch *das uneigentliche (absolut konvergente) RIEMANN-Integral.* Dies erkennt man am besten im folgenden in Verbindung mit den Konvergenzeigenschaften des LEBESGUE-Integrals, für die neben (5) nun wirklich die starke Eigenschaft der σ-Subadditivität (2+) eingesetzt wird.

1.12 Vorteile des Lebesgue-Integrals · Konvergenzsätze

Zunächst betrachten wir wieder — jetzt bezüglich der LEBESGUE-Norm — *Nullfunktionen*, also solche, deren Integralnorm 0 ist, und *Nullmengen*, also solche, deren charakteristische Funktion Nullfunktion ist. Auf den ersten Blick überraschend — im Vergleich zu den bisherigen Integralbegriffen — erscheinen die Eigenschaften:

Jede Funktion, deren Betrag durch eine abzählbare Summe von Nullfunktionen majorisiert ist, ist selbst Nullfunktion.

Jede Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen ist selbst Nullmenge.

Eine Funktion ist Nullfunktion genau dann, wenn ihr Träger Nullmenge ist.

Eine Folgerung der zweiten Aussage ist natürlich, daß jetzt eine *Null-$*$-Menge schon Nullmenge* ist und *alle abzählbaren Mengen Nullmengen* sind.

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus (2+). Die zweite ergibt sich direkt aus der ersten. Für die dritte schließlich schreibt man mit $M := \operatorname{Tr} f$ die beiden Ungleichungen

$$\chi_M \le |f| + |f| + \cdots , \quad |f| \le \chi_M + \chi_M + \cdots$$

auf, aus denen man mit der σ-Subadditivität (2+) beide Implikationen abliest. □

In diesem Zusammenhang wollen wir hier sogleich für einen oft auftretenden Sachverhalt eine kurze und bequeme Sprechweise einführen. Gilt eine Eigenschaft, speziell eine Gleichung oder Abschätzung, für alle x aus $\mathbb{R}$ mit Ausnahme einer Nullmenge ($\emptyset$ ist natürlich zugelassen), so werden wir sagen: sie gilt *„fast überall“*. Entsprechend verwenden wir auch die Redeweisen *„fast überall auf M“* oder *„für fast alle x aus M“*, falls ausgedrückt werden soll, daß die Menge der Ausnahmestellen, hier natürlich eine Teilmenge von M, eine Nullmenge ist. Als Abkürzung setzen wir hinter entsprechende Aussagen auch einfach *„f.ü.“*.

Auf diese Weise können wir etwa formulieren:

Gilt $f(x) = g(x)$ f.ü. für zwei Funktionen f, g aus $\mathfrak{F}$, so haben sie gleiche Integralnorm. Ist dabei f LEBESGUE-integrierbar, so auch g, und die Integralwerte sind gleich.

Zum *Beweis* ist nur zu bedenken, daß $\operatorname{Tr}(f-g)$ eine Nullmenge und nach obiger Bemerkung also $f-g$ eine Nullfunktion ist. Eine solche ist aber integrierbar mit Integralnorm und Integralwert 0. □

Wie wir dies schon eben getan haben, werden wir in diesem Abschnitt statt „LEBESGUE-integrierbar“ und „LEBESGUE-Integral“ kurz *„integrierbar“* und *„Integral“* sagen.

Änderung

Mit Hilfe einfacher Schlußweisen aufgrund von (2+) und (5) erhalten wir nun im folgenden eine Reihe sehr starker Konvergenzsätze und verwandter Aussagen, deren Fehlen bei den früheren Integralbegriffen wir zu Beginn des vorigen Abschnitts schon motivierend bemerkt hatten.

Erster Konvergenzsatz:

Sind f_n beliebige Funktionen aus $\mathfrak{F}$ und gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\| < \infty ,$$

so ist die Reihe der Funktionen selbst,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) ,$$

fast überall absolut konvergent (und somit konvergent). Ist mit einer Funktion f

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = f(x) \quad \text{f.ü.} ,$$

so gilt

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu - f \right\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Ist nämlich M die Menge der Stellen, wo absolute Konvergenz nicht gilt, so hat man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_M \le \sum_{\nu=n}^{\infty} |f_\nu| ,$$

also durch Anwendung von (2+)

$$\|\chi_M\| \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \|f_\nu\| .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0. Also ist M, wie behauptet, Nullmenge. Für die zweite Aussage können wir f schon so abgeändert annehmen, daß $f(x)$ genau die Reihensumme ist, falls die Reihe in x absolut konvergiert. Dann hat man offenbar

$$\left| f - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \right| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |f_\nu| ,$$

und Anwendung von (2+) liefert wieder die Behauptung. □

Indem wir dies auf integrierbare Funktionen spezialisieren, haben wir den

Konvergenzsatz von Levi I: $\left(\textbf{Levi } \sum\right)$

Sind die Funktionen f_n integrierbar und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|\, dx < \infty ,$$

so ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

selbst fast überall absolut konvergent. Gilt für eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ fast überall

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) ,$$

so ist f integrierbar, und man kann gliedweise integrieren:

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx .$$

In $\mathfrak{I}$ stimmen Integralwerte der Beträge und Integralnormen überein. Daher ist nur noch zu bemerken, daß die Partialsummen und damit f, nach bekannter Schlußweise, in $\mathfrak{I}$ liegen. Dann gibt die Integralabschätzung (4) (in $\mathfrak{I}$) die letzte Behauptung. □

Eine einfache Folgerung ist der

Konvergenzsatz von Levi II: **(Levi $\uparrow$)**

Sind die Funktionen f_n integrierbar, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad \textit{f.ü.}\,,$$

und ist die Folge der Integralwerte der f_n beschränkt, dann ist für fast alle x die Folge der Funktionswerte $f_n(x)$ konvergent (in $\mathbb{R}$). Ist f eine Funktion mit

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad \textit{f.ü.}\,,$$

so ist f integrierbar, und man hat

$$\int f_n(x)\,dx \longrightarrow \int f(x)\,dx\,.$$

Zum *Beweis* kann man vereinfachend die abzählbar vielen Ausnahmemengen zu *einer* Nullmenge zusammenfassen und auf dieser die Funktionen f_n und f zu 0 abändern. Das ändert Integrierbarkeit und Integrale nicht, und alle Voraussetzungen gelten jetzt *überall.* Man schreibt dann zu

$$\sum_{n=1}^{N} \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) \;=\; f_{N+1}(x) - f_1(x)$$

um und wendet hierauf den Konvergenzsatz von Levi I an, wobei man beachtet, daß die aufgeschriebenen Differenzenfunktionen nicht-negativ sind. Damit ist ... der Beweis gegeben. □

ausführen!

Trivial ist die

Bemerkung: **(Levi $\downarrow$)**

Im Konvergenzsatz von Levi II kann überall ‚$\leq$' durch ‚$\geq$' ersetzt werden.

Als leichte Anwendung erhalten wir den

Satz von Fatou:

Sind die Funktionen f_n integrierbar und nicht-negativ und ist

$$\liminf \int f_n(x)\,dx < \infty\,,$$

so ist

$$\liminf f_n(x) < \infty \qquad \textit{f.ü.}\,.$$

Ist f aus $\mathfrak{F}$ mit

$$f(x) = \liminf f_n(x) \qquad \textit{f.ü.}\,,$$

so ist f integrierbar und es gilt

$$\int f(x)\,dx \leq \liminf \int f_n(x)\,dx\,.$$

Zum *Beweis* betrachtet man die Funktionen

$$g_n := \inf\{f_\nu : \nu \geq n\},$$

die man als nicht-negative Limites der absteigenden Folgen integrierbarer Funktionen

$$g_{nm} := f_n \wedge f_{n+1} \wedge \cdots \wedge f_m \qquad (m = n,\, n+1,\, \cdots)$$

darstellen kann und so (Bemerkung) als integrierbar erkennt. Man hat

$$g_n \leq f_n\,.$$

Somit stellen die g_n eine offenbar aufsteigende Folge integrierbarer Funktionen dar, die beschränkte Integralwerte haben. So ist noch einmal der (Konvergenz-)Satz von Levi II anwendbar, und nach Voraussetzung konvergieren die $g_n(x)$ fast überall gegen $f(x)$. So ist also f integrierbar und es gilt

Änderung

$$\infty > \liminf i(f_n) \geq \liminf i(g_n) = \lim i(g_n) = i(f)\,.$$

Das liefert auch die letzte Behauptung. □

Voraussetzungen und Behauptung des Satzes von Fatou lassen sich sofort noch in zwei Richtungen modifizieren. Zunächst genügt es, statt ‚≥ 0' vorauszusetzen ‚$\geq g$', wobei g eine integrierbare Funktion ist. Andererseits kann man natürlich die Anordnung umkehren und überall ‚$\geq$' und ‚$\leq$' vertauschen, also auch ‚sup' und ‚inf', ‚lim sup' und ‚lim inf'.

Hat man gleichzeitig eine gemeinsame untere Schranke g und obere Schranke h, so ergibt sich für den Spezialfall der konvergenten Folge der wichtige

Konvergenzsatz von Lebesgue: (Satz über majorisierte Konvergenz) Änderung

Sind g, h, f_n integrierbare Funktionen, gilt

$$g(x) \leq f_n(x) \leq h(x) \qquad \textit{f.ü.} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und hat man mit einer Funktion f aus $\mathfrak{F}$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad \textit{f.ü.}\,,$$

so ist f integrierbar und es gilt

$$\int f_n(x)\,dx \longrightarrow \int f(x)\,dx\,.$$

Der Leser möge hier übungshalber zeigen, daß auch

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0$$

gilt. Ebenso möge man sich verdeutlichen, daß bei Abschwächung der Voraussetzung $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ *f.ü.* $(n \in \mathbb{N})$ zu $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *f.ü.* noch die Integrierbarkeit von f erhalten bleibt, jedoch im allgemeinen nicht mehr die Konvergenz der Integrale. Man verwendet hierzu natürlich die ‚Beschneidungen' der f_n durch g und h: $(g \vee f_n) \wedge h$.

Fast direkte Folgerung aus dem „Ersten Konvergenzsatz" ist der

Vollständigkeitssatz:

$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{I}$ sind bezüglich $\|\ \|$ „vollständig": Sind f_n aus $\mathfrak{F}$ bzw. aus $\mathfrak{I}$ mit

$$\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0 \qquad (n,\, m \to \infty),$$

also (f_n) *,*CAUCHY*-Folge bezüglich* $\|\ \|$*', so gibt es ein* f *aus* $\mathfrak{F}$ *bzw. aus* $\mathfrak{I}$ *mit*

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

gegen das also (f_n) *,bezüglich* $\|\ \|$ *konvergiert'.*

Zum *Beweis* wählt man (Übungsaufgabe!) eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ derart, daß

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_{n_{\kappa+1}} - f_{n_\kappa}\| < \infty .$$

Nach dem „Ersten Konvergenzsatz" existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{F}$ mit

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} (f_{n_{\kappa+1}} - f_{n_\kappa}) - g \right\| \longrightarrow 0 \quad (\nu \to \infty);$$

für $f := f_{n_1} + g$ hat man also

$$\|f_{n_\nu} - f\| \longrightarrow 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$\|f_n - f\| \le \|f_n - f_{n_\nu}\| + \|f_{n_\nu} - f\|$$

ergibt sich dann wegen der Voraussetzung, daß (f_n) eine CAUCHY-Folge ist,

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Soweit der Beweis für beliebige f_n aus $\mathfrak{F}$. Liegen diese speziell in $\mathfrak{I}$, so gehört aufgrund früherer Schlußweise auch f zu $\mathfrak{I}$. □

Im Zusammenhang mit dieser Beweistechnik notieren wir noch die folgende

Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\|\ \|$:

Innerhalb $\mathfrak{F}$ *gilt* $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ *genau dann, wenn* $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ *und eine Teilfolge* (f_{n_ν}) *existiert, die punktweise fast überall gegen* f *konvergiert.*

Zum *Beweise* der einen Richtung gehen wir von $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ aus. Dann folgt, wie üblich, die CAUCHY-Konvergenz $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ mit der Dreiecksungleichung. Nach den zuvor notierten Überlegungen gibt es nun eine Teilfolge, die fast überall gegen eine Funktion g konvergiert, wobei andererseits $\|f_n - g\| \longrightarrow 0$ gilt. Die Dreiecksungleichung erweist dann $f - g$ als Nullfunktion, die Trägermenge als Nullmenge. Also konvergiert die Teilfolge auch fast überall gegen f. — Für die andere Richtung kann man mit den obigen Argumenten ohne Einschränkung annehmen, daß schon die ursprüngliche Folge fast überall gegen f konvergiert. Nach dem schon Bewiesenen gibt es eine Funktion g derart, daß $\|f_n - g\| \longrightarrow 0$ gilt und eine Teilfolge fast überall gegen g konvergiert. Damit ist aber wieder $f - g$ Nullfunktion, also gilt $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. □

Änderung

Wir bitten den Leser, sich rückblickend deutlich zu machen, was an Hilfsmitteln für die Beweise dieser Konvergenz- und Vollständigkeitssätze jeweils benutzt wurde. Man erkennt nämlich, daß für die ersten vier Aussagen über Nullmengen und Nullfunktionen, den Ersten Konvergenzsatz, den Vollständigkeitssatz und die anschließende Charakterisierung nur verwendet wurde, daß die Integralnorm die

Änderung

starke Eigenschaft (2+) erfüllt. Dagegen wurde schon für die Formulierung des (Konvergenz-)Satzes von LEVI I und erst recht beim Übergang zum Satz von LEVI II wesentlich benutzt, daß die Integralnorm auf $\mathfrak{E}$ und damit auf $\mathfrak{I}$ mit dem Integral des Betrages übereinstimmt, was eine entsprechende ‚Additivität' liefert. So sind denn auch die erstgenannten Sätze für die Theorie des Integrals von Regelfunktionen gültig, da die Supremums-Norm offenbar abzählbar-subadditiv ist. In diesem Falle hat man jedoch keine ‚Additivität' im oben erwähnten Sinne: Der Leser wird sofort bestätigen, daß in diesem Falle Aussagen, die den Sätzen von LEVI, FATOU und LEBESGUE entsprechen, — hier ist übrigens nur die leere Menge Nullmenge — *nicht* gelten ($\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe).

Wir kommen nun noch einmal zurück auf die oben definierten LEBESGUE-Nullmengen. Wir sind dem Leser von den Überlegungen zu den Kriterien für RIEMANN-Integrierbarkeit her (im Buch Seite 19) noch den Nachweis für die folgende Feststellung schuldig:

Eine Menge M *ist genau dann* LEBESGUE*-Nullmenge, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Überdeckung durch offene Intervalle*

$$M \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \quad \textit{mit} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu) < \varepsilon$$

gibt.

Daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, folgt sofort mit (2+) und (5), indem man diese auf die charakteristischen Funktionen anwendet:

$$\|\chi_M\| \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\chi_{A_\nu}\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} i(\chi_{A_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu) < \varepsilon .$$

Für die andere Richtung geht man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ von einer Folge

$$h_1 \le h_2 \le \cdots \le \sup h_k \ge \chi_M, \ h_k \in \mathfrak{E}^+, \ i(h_k) \le \varepsilon/4$$

aus. Sei dann etwa

$$M_k := \{ x \in \mathbb{R} : h_k(x) \ge 1/2 \},$$

so hat man

$$(*) \qquad \mathfrak{E} \ni \chi_{M_k} \le 2h_k, \quad i(\chi_{M_k}) \le \varepsilon/2 .$$

Nun lassen sich disjunkte Intervalle B_n $(n \in \mathbb{N})$ und $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ in $\mathbb{N}$ so finden, daß

$$M_k = \biguplus_{n=1}^{n_k} B_n .$$

Nach Konstruktion und $(*)$ hat man

$$M \subset \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

Schließlich findet man offene Intervalle $A_n \supset B_n$ mit

$$\mu(A_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

und hat so, wie gewünscht,

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon. \qquad \square$$

Im folgenden wollen wir noch einmal auf unsere Definition der LEBESGUE-Norm zurückkommen und diese jetzt im Zusammenhang mit dem Konvergenzsatz von LEVI II betrachten. Ist nämlich $f \in \mathfrak{F}$ mit $\|f\| < \infty$, so hat man aufsteigende Folgen $h_n \in \mathfrak{E}^+$ mit $\sup h_n \geq |f|$, $\sup i(h_n) < \infty$. Hier ist der genannte Konvergenzsatz anwendbar: Erklärt man

$$g(x) := \begin{cases} \sup h_n(x) & (\text{falls } < \infty), \\ |f(x)| & (\text{sonst}), \end{cases}$$

so ist $g \in \mathfrak{I}$, $g \geq |f|$ und $\sup i(h_n) = i(g)$. Damit ist, wenn man dazu noch die Monotonie von $\| \;\|$ und (5) für $\mathfrak{I}$, speziell hier $i(g) = \|g\|$, beachtet, gezeigt, daß

$$\|f\| = \inf \left\{ i(g) : g \in \mathfrak{I},\, g \geq |f| \right\}.$$

Dabei drückt sich in der Verabredung $\inf \emptyset := \infty$ die Tatsache aus, daß ein g aus $\mathfrak{I}$ mit $g \geq |f|$ genau dann existiert, wenn $\|f\| < \infty$. Bemerkenswert ist nun, daß für $\|f\| < \infty$ das Infimum zugleich das Minimum ist:

Norm-Hüllen-Satz:

Ist f aus $\mathfrak{F}$ mit $\|f\| < \infty$, so gibt es eine integrierbare Funktion $g \geq |f|$ mit $i(g) = \|f\|$.

Als Übungsaufgabe für den Leser sei empfohlen zu zeigen, daß eine Funktion g mit der geschilderten Hülleneigenschaft zu f bis auf eine Nullmenge bestimmt ist: Die Differenz zweier solcher Funktionen ist Nullfunktion.

Wir *beweisen** den Norm-Hüllen-Satz zugleich mit dem folgenden

Norm-Limes-Satz:

Sind f_n für n aus $\mathbb{N}$ und f beliebige Funktionen aus $\mathfrak{F}$ und gilt $|f_n(x)| \uparrow \geq |f(x)|$ f.ü., so hat man auch $\|f_n\| \uparrow \geq \|f\|$.

In suggestiver Notierung bedeutet natürlich ‚$\uparrow \geq$', daß es sich um eine nicht-abnehmende Folge mit Supremum $\geq$ handelt.

Äquivalent ist die Aussage:

Aus $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$ folgt stets $\|f_n\| \uparrow \|f\|$.

Für die gemeinsame Herleitung setzt man beim ersten Satz $f_n := f$ und kann sich einerseits auf die Betrachtung nicht-negativer Funktionen, andererseits beim zweiten Satz auf die Konvergenz überall beschränken. Wir gehen so aus von

$$0 \leq f_n \uparrow f$$

und setzen

* In der Vorlesung beide Sätze separat beweisen, da so doch etwas durchsichtiger!

$$s := \sup \|f_n\|.$$

Beide Sätze folgen dann offenbar aus der Feststellung:
Ist $s < \infty$, so gibt es eine Funktion $g \in \mathfrak{I}$ mit $g \geq f$ und $i(g) \leq s$.
Um dies zu zeigen, knüpft man an die vorangehende Bemerkung an, nach der Funktionen

$$\mathfrak{I} \ni g_n \geq f_n, \; i(g_n) \leq \|f_n\| + \frac{1}{n}$$

existieren. Definiert man nun

$$g(x) := \begin{cases} \liminf g_n(x), & \text{falls } < \infty, \\ f(x), & \text{sonst}, \end{cases}$$

so hat diese Funktion nach dem Satz von FATOU die gewünschten Eigenschaften:

$$\mathfrak{I} \ni g \geq f, \;\; \|f\| \leq i(g) \leq \liminf i(g_n) \leq s. \qquad \square$$

Abschließend wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es sinnvoll ist, das LEBESGUE-Integral ähnlich fortsetzen zu wollen, wie wir dies beim Übergang vom eigentlichen zum uneigentlichen RIEMANN-Integral durchgeführt haben. Wir wollen also hier die mit der LEBESGUE-Norm $\| \;\|$ gebildete zugehörige ‚lokale' Integralnorm

$$\|f\|_\ell := \sup \left\{ \|h \wedge |f|\| : h \in \mathfrak{E}^+ \right\}$$

untersuchen. Indem man eine majorisierende Folge (h_n) betrachtet, zeigt nun unser Norm-Limes-Satz, angewendet auf $(h_n \wedge |f|) \uparrow |f|$, daß diese lokale Integralnorm *hier* mit der zugrundegelegten LEBESGUE-Norm übereinstimmt:

$$\|f\|_\ell = \|f\|.$$

Da für g aus $\mathfrak{F}$ gilt $\|g\| \leq \|g\|_R$, erhält man durch Anwendung dieser Ungleichung auf die zur Definition der beiden lokalen Integralnormen betrachteten Funktionen $g = h \wedge |f|$ sofort

$$\|f\|_{R,\ell} \geq \|f\|_\ell = \|f\|,$$

wobei die erste Norm sinngemäß die für das uneigentliche RIEMANN-Integral verwendete Integralnorm bezeichnet. So kann man sagen:

Die Bildung der lokalen Integralnorm zur LEBESGUE-Norm liefert nichts Neues.

Das LEBESGUE-Integral ist Fortsetzung des uneigentlichen (absolut konvergenten) RIEMANN-Integrals.

Die letzte Aussage ergibt sich natürlich mit dem oben formulierten Vergleichsprinzip (Seite 20).

Daß es sich wirklich um eine echte Fortsetzung handelt, sieht man sofort durch Hinweis auf die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen im Intervall [0, 1], die wegen der Abzählbarkeit des Trägers LEBESGUE-Nullfunktion, also LEBESGUE-integrierbar, aber bekanntlich nicht eigentlich oder uneigentlich RIEMANN-integrierbar ist.

. . . . Auslassung