Kapitel 2

Verallgemeinerte Riemann- und Lebesgue-Integrale, Inhalte und Maße

Im vorangehenden Kapitel 1 haben wir verschiedenartige einfache Integralbegriffe für Funktionen auf $\mathbb{R}$ behandelt und dabei eine allgemeine Methodik der Integralfortsetzung entwickelt. Ein nächstes Ziel wird im folgenden sein, derartige Überlegungen auch auf Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, also für die mehrdimensionale Analysis, auszudehnen. Dort werden an die Stelle der Intervalle in $\mathbb{R}$ Rechtecke, Quader, eben mehrdimensionale ‚Intervalle', treten. Für die zugehörigen Riemann- und Lebesgue-Integrale übernimmt dann das Produkt der ‚Kantenlängen' die Rolle der Intervall-Länge.

Es ist nun zweckmäßig, hier sogleich etwas zu verallgemeinern und innerhalb einer *beliebigen Grundmenge* geeignete Mengensysteme und zugehörige ‚Inhalte' zu betrachten. Dies bringt ein hohes Maß an Übersichtlichkeit und vermeidet es, in verschiedenartigen Situationen immer wieder ähnliche Überlegungen anzustellen. Der angesprochene Verallgemeinerungsschritt wird es gestatten, so verschiedenartige Situationen wie die genannten mehrdimensionalen Integrale, Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Reihenlehre — und natürlich vieles andere mehr — als Spezialfälle einzuordnen.

Neben diesem ganz einfachen Abstraktionsschritt, den wir bei unseren Betrachtungen im Kapitel 1 über Treppenfunktionen und deren Integrale schon angekündigt und vorbereitet haben, lassen wir jetzt auch *allgemeinere Wertebereiche* zu. Wir bleiben dagegen vorläufig noch bei der Betrachtung nichtnegativer ‚Inhalte'. Mit Blick auf das Ziel der Integrale der mehrdimensionalen Analysis wird so nichts Überflüssiges, sondern lediglich Vereinfachendes bereitgestellt. Änderung!

2.1 Prä-Ringe, Inhalte, verallgemeinerte elementare Integrale

Sei jetzt $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge und $\mathbb{S}$ ein nicht-leeres System von Teilmengen von $\mathfrak{R}$ mit der *„Zerlegungseigenschaft“:*

$\mathbb{S}$ enthält die leere Menge $\emptyset$, und zu beliebigen Elementen A_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ aus $\mathbb{S}$ gibt es ***disjunkte*** *C_λ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \ell)$ in $\mathbb{S}$ derart, daß jedes A_ν (disjunkte) Vereinigung gewisser, eben der in ihm enthaltenen, C_λ ist:*

$$A_\nu = \biguplus \{C_\lambda : C_\lambda \subset A_\nu\}\,.$$

Wir gehen dabei ‚immer‘ Œ von $\cup_{\nu=1}^n A_\nu = \uplus_{\lambda=1}^{\ell} C_\lambda$ aus.

Dann folgt speziell (siehe unten):

Sind A und B Mengen aus $\mathbb{S}$, so läßt sich die Differenz $A \setminus B$ als disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathbb{S}$ darstellen.

Wir nennen ein nicht-leeres Mengensystem $\mathbb{S}$ mit dieser letzten Eigenschaft einen *„Prä-Ring“*. Offenbar gehört $\emptyset$ zu jedem Prä-Ring.

Wir zeigen nun in relativ einfachen Schritten:

Für ein nicht-leeres System $\mathbb{S}$ von Teilmengen von $\mathfrak{R}$ sind äquivalent:

(a) $\mathbb{S}$ ist Prä-Ring,

(b) Das System $R(\mathbb{S})$ der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathbb{S}$ ist ‚Mengen-Ring‘, also abgeschlossen gegen Bildung von Vereinigungen und Differenzen und damit Durchschnitten von je zwei Mengen und so von Vereinigungen und Durchschnitten endlich vieler Mengen,

(c) $\mathbb{S}$ hat die Zerlegungseigenschaft.

Wir schließen dazu (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b): Allgemein genügt es für den Nachweis der Ring-Eigenschaft, die Abgeschlossenheit gegen die Bildung von Differenzen und *disjunkten* Vereinigungen zu zeigen, weil

$$A \cup B = (A \setminus B) \uplus (A \cap B) \uplus (B \setminus A), \qquad A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Im vorliegenden Fall ist die Abgeschlossenheit gegen disjunkte Vereinigungen trivial. So bleibt nur die Betrachtung von Differenzen. Hier aber rechnet man einfach

$$\biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu \setminus \biguplus_{\kappa=1}^{k} B_\kappa = \biguplus_{\nu=1}^{n} (A_\nu \setminus B_1) \setminus \biguplus_{\kappa=2}^{k} B_\kappa$$

und schließt mit Induktion nach k.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Man schließt natürlich durch Induktion nach n, der Anzahl der gegebenen beliebigen Mengen aus $\mathbb{S}$, wobei $n = 1$ trivial ist. Der Induktionsschritt führt dann auf die folgende reduzierte Aufgabe: *Es seien $B_1, B_2, \cdots, B_k$ disjunkt in $\mathbb{S}$ und B_{k+1} eine beliebige weitere Menge in $\mathbb{S}$; man hat hierzu endlich viele disjunkte Mengen $D_1, D_2, \cdots, D_m$ in $\mathbb{S}$ zu finden, die die Darstellung aller gegebenen Mengen B_κ als disjunkte Vereinigungen gestatten.* Um dies zu erkennen, bildet man einfach die $2k$ disjunkten Mengen

$$B_1 \cap B_{k+1},\ B_1 \setminus B_{k+1},\ \cdots,\ B_k \cap B_{k+1},\ B_k \setminus B_{k+1}$$

und die dazu disjunkte Menge

$$B_{k+1} \setminus \biguplus_{\kappa=1}^{k} B_\kappa\,.$$

Diese Mengen liegen offenbar in $R(\mathbb{S})$ und lassen sich also jeweils als endliche disjunkte Vereinigungen von Mengen aus $\mathbb{S}$ darstellen. Alle diese sind dann die gewünschten Mengen $D_1, D_2, \cdots, D_m$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Wir betrachten zu zwei beliebigen Mengen A, B aus $\mathbb{S}$ gemäß (c) die darstellenden disjunkten Mengen $C_1, C_2, \cdots, C_\ell$; wir können annehmen, daß hierzu $\emptyset$ gehört. Dann ist in jedem Falle offenbar

$$A \setminus B = \biguplus \{ C_\lambda : C_\lambda \subset A \setminus B \}\,. \qquad \square$$

Seien nun im folgenden $\mathbb{S}$ ein Prä-Ring von Teilmengen der nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und $\{0\} \neq \mathfrak{B}$ ein $\mathbb{K}$-BANACH-Raum*, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir betrachten

$$\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$$

den $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{B}$. Dann wird man in Verallgemeinerung der Treppenfunktionen**

$$\mathfrak{E} := \operatorname{span}\Big\{\chi_A\, a : A \in \mathbb{S}, a \in \mathfrak{B}\Big\} = \left\{\sum_{\kappa=1}^{k} \chi_{A_\kappa} a_\kappa : k \in \mathbb{N}, a_\kappa \in \mathfrak{B}, A_\kappa \in \mathbb{S}\right\}$$

bilden, was natürlich Unterraum von $\mathfrak{F}$ ist. Gelegentlich notieren wir genauer

$$\mathfrak{E} =: \mathfrak{E}(\mathfrak{B}) =: \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathfrak{B}).$$

Wesentlich ist auch hier wieder die Eigenschaft, daß für eine Funktion aus $\mathfrak{E}(\mathfrak{B})$ die zugehörige Betragsfunktion zu $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ gehört. Der Unterraum $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$

---

* *hier* reicht noch: $\mathfrak{B}$ $\mathbb{K}$-Vektorraum

** Für $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathbb{R})$ und $b \in \mathfrak{B}$: $(\varphi b)(x) := \varphi(x) b \quad (x \in \mathfrak{R})$

ist also auch abgeschlossen gegen die Bildung endlicher Suprema und Infima ist. (Hier und an ähnlichen Stellen benutzt man — wie bei den Treppenfunktionen — immer wieder ‚Darstellungen' bzw. gemeinsame Darstellungen mit disjunkten Mengen in $\mathbb{S}$.) Wir bezeichnen die Funktionen aus $\mathfrak{E}$ als die *„einfachen Funktionen (zu $\mathbb{S}$ und $\mathfrak{B}$)"* und Funktionen $\chi_A a$ (mit $A \in \mathbb{S}, a \in \mathfrak{B}$) gelegentlich auch als *„einfachste Funktionen"*. Offenbar gilt $\chi_A h, \chi_{\widetilde{A}} h \in \mathfrak{E}$ für $h \in \mathfrak{E}$ und $A \in R(\mathbb{S})$.

Änderung

Ergänzung

Man bestätigt noch sofort:

$R(\mathbb{S})$ ist der kleinste $\mathbb{S}$ umfassende Ring. Die Mengen aus $R(\mathbb{S})$ sind genau diejenigen, deren charakteristische Funktionen in $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ liegen. $R(\mathbb{S})$ besteht genau aus den Trägermengen der Funktionen aus $\mathfrak{E}$.

ausführen!

Kapitel 2

Sei nun allgemein

$$\mu : \mathbb{S} \longrightarrow [0, \infty[$$

ein *„(klassischer) Inhalt"* auf $\mathbb{S}$, wobei ‚Inhalt' die Additivität bei endlichen disjunkten Vereinigungen beinhaltet und ‚klassisch' die endlichen und nichtnegativen Werte betonen soll. Dann kann aufgrund der Zerlegungseigenschaft von $\mathbb{S}$ und der Additivität von μ die Schlußweise aus Abschnitt 1.3 vollständig durchgeführt werden. Sie liefert die Aussage:

Änderung

Es gibt genau eine lineare Abbildung

$$i_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{B}$$

mit

$$i_{\mathfrak{B}}(\chi_A a) = \mu(A) a \qquad (A \in \mathbb{S}, a \in \mathfrak{B}).$$

Wir nennen diese das von μ erzeugte *„elementare Integral"*. $i_{\mathbb{R}}$ ist *positiv*, damit *monoton* und man hat

$$\left|i_{\mathfrak{B}}(h)\right| \leq i_{\mathbb{R}}(|h|).$$

Umgekehrt erkennt man:

Ist

$$j : \mathfrak{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine positive lineare Abbildung der einfachen Funktionen zum Prä-Ring $\mathbb{S}$ in $\mathfrak{R}$, so gibt

$$\nu(A) := j(\chi_A) \qquad (A \in \mathbb{S})$$

einen klassischen Inhalt auf $\mathbb{S}$, der offenbar wieder j als zugehöriges elementares Integral $i_{\mathbb{R}}$ erzeugt.

Nun kann man natürlich $R(\mathbb{S})$ auch wieder als Prä-Ring betrachten und bemerken, daß $\mathfrak{E}$ auch die Menge der einfachen Funktionen zu $R(\mathbb{S})$ ist. So liefert unsere vorangehende Bemerkung offenbar die *eindeutige Existenz einer Fortsetzung des Inhalts μ auf $\mathbb{S}$ zu einem Inhalt auf $R(\mathbb{S})$*. Wir bezeichnen diesen der Einfachheit halber auch wieder mit μ.

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 8. Juni 2006, 22:41 Uhr

2.2 Verallgemeinertes Riemann-Integral

In der eben dargestellten allgemeinen Situation eines klassischen Inhalts auf einem Prä-Ring kann man nun stets eine *verallgemeinerte „*RIEMANN-DARBOUX-*Norm"* einführen, indem man für $f \in \mathfrak{F}$ erklärt:

$$\|f\| := \|f\|_R := \inf\left\{ i_{\mathbb{R}}(h) : \mathfrak{E}^+ \ni h \geq |f| \right\},$$

natürlich mit der Verabredung $\inf \emptyset := \infty$ und

$$\mathfrak{E}^+ := \left\{ h \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}) : h \geq 0 \right\}.$$

$\|f\|$ hängt offenbar nur von $|f|$ ab, ist also insbesondere unabhängig von $\mathfrak{B}$.

Kapitel 2

Völlig analog zu dem Spezialfall der Intervall-Länge in $\mathbb{R}$ erweist sich $\|\ \|$ als *Integralnorm* auf $\mathfrak{F}$: Es gelten die Eigenschaften (0), (1), (2) und (3) von Seite 10. Überdies hat man für $h \in \mathfrak{E}$ wieder

$$\left|i_{\mathfrak{B}}(h)\right| \leq \|h\| = i_{\mathbb{R}}(|h|),$$

also die Eigenschaften (4) und (5) von Seite 10. Auch erweist sich wieder $\|\ \|_R$ als die *größte Integralnorm auf $\mathfrak{F}$, die auf $\mathfrak{E}$ mit dem reellen Integral des Betrages übereinstimmt* (vgl. Seite 31).

Aufgrund von (4) ist nun $\|\ \|_R$ für die Fortsetzung von $i_{\mathfrak{B}}$ *gemäß* unserem — auch in dieser allgemeineren Situation gültigen — *Fortsetzungsprinzip* (vgl. Seite 11) *„geeignet"*. Die entsprechende Fortsetzung von $i_{\mathfrak{B}}$ nennen wir *(verallgemeinertes) „eigentliches* RIEMANN-*Integral"*.

Für den *Raum* $\mathfrak{I}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{I}_R(\mathfrak{B})$ *der* entsprechenden *integrierbaren Funktionen* gilt wieder: Für $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$ ist $|f| \in \mathfrak{I}(\mathbb{R})$. $\mathfrak{I}(\mathbb{R})$ ist also wieder abgeschlossen *gegen Bildung endlicher Suprema und Infima.* Auch auf $\mathfrak{I}$ *stimmt die Integralnorm mit dem reellen Integral des Betrages überein.* Die *Integralnorm* ist also *auf $\mathfrak{I}$ endlich* und das erweiterte *Integral auf $\mathfrak{I}(\mathbb{R})$ positiv und monoton.*

Ebenfalls wie im Spezialfall kann man für $f \in \mathfrak{F}$ erklären:

$$\|f\|_\ell := \|f\|_{R,\ell} := \sup\left\{ \left\|h \wedge |f|\right\|_R : h \in \mathfrak{E}^+ \right\}.$$

Diese zugehörige *‚lokale' Integralnorm* ist offenbar die *kleinste Integralnorm, die für Funktionen f mit $\|f\|_R < \infty$ mit $\|\ \|_R$ übereinstimmt.* Sie liefert in analoger Weise ein *(verallgemeinertes) „uneigentliches* RIEMANN-*Integral"*. Es gilt für $f \in \mathfrak{F}$

$$\|f\|_\ell \leq \|f\|;$$

daraus ergibt die Vergleichsüberlegung ganz wie im Kapitel 1:

Das uneigentliche RIEMANN-*Integral ist eine Fortsetzung des eigentlichen* RIEMANN-*Integrals.*

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 8. Juni 2006, 22:41 Uhr

Wir bezeichnen den Raum der entsprechenden integrierbaren Funktionen gelegentlich mit $\mathfrak{I}_{R,\ell} = \mathfrak{I}_{R,\ell}(\mathfrak{B})$; wegen der festgestellten Fortsetzungseigenschaft kann weitgehend ohne Mißverständnis das Integral wieder mit i bezeichnet werden.

Wie im Spezialfall erkennt man, daß $\mathfrak{I}_R(\mathfrak{B})$ genau aus den Funktionen f aus $\mathfrak{I}_{R,\ell}(\mathfrak{B})$ besteht, für die $\|f\|_R < \infty$ gilt. Dies besagt offenbar gerade: f ist beschränkt und $\mathrm{Tr}\, f$ ist in eine Menge aus $R(\mathbb{S})$ einschließbar.

Ergänzend ergeben sich noch — ebenfalls wie im Spezialfall — aus den entsprechenden Eigenschaften für $\mathfrak{E}$

$$f \in \mathfrak{I}_R(\mathfrak{B}) \wedge A \in R(\mathbb{S}) \implies \chi_A f, \chi_{\widetilde{A}} f \in \mathfrak{I}_R(\mathfrak{B}),$$
$$g \in \mathfrak{I}_R(\mathbb{R}) \wedge f \in \mathfrak{I}_R(\mathfrak{B}) \implies gf \in \mathfrak{I}_R(\mathfrak{B}).$$

Kapitel 2

2.3 Verallgemeinerter Jordan-Inhalt

Zugleich mit den eben beschriebenen Integralerweiterungen hat man Fortsetzungen des auf $\mathbb{S}$ bzw. $R(\mathbb{S})$ gegebenen Inhalts μ: Man hat nur die Integrale entsprechender charakteristischer Funktionen zu betrachten. Dies gibt im Spezialfall die Definition von Flächeninhalten oder Volumina im Zwei- und Dreidimensionalen. Inhalte (bzw. Maße) ergeben sich so als einfaches Nebenprodukt der Integral-Fortsetzung. Dies steht im Gegensatz zu vielen Darstellungen von Integrationstheorien, die zuerst gewisse Fortsetzungen von Inhalten (oder Maßen) ausgiebig beschreiben und darauf erst später — relativ umständlich — die Einführung von Integralen begründen. Hier genügt also für beides *ein* einfacher Fortsetzungsschritt. Wir empfehlen dem Leser, eine Darstellung der genannten Art zum Vergleich einmal kurz anzusehen.

Wir werden einige diesbezügliche Überlegungen sogleich etwas allgemeiner durchführen, um sie speziell nicht nur für das (verallgemeinerte) eigentliche oder uneigentliche RIEMANN-Integral, sondern später auch im Zusammenhang mit dem (verallgemeinerten) LEBESGUE-Integral anwenden zu können. So gehen wir, wie eben, von einem klassischen Inhalt μ auf einem Prä-Ring $\mathbb{S}$ in einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und dem zugehörigen elementaren Integral i auf dem Raum der einfachen Funktionen $\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(\mathbb{R})$ aus, betrachten jedoch allgemeiner *irgendeine* Integralnorm $\|\ \|$ auf $\mathfrak{F}$ (alle reellen Funktionen auf $\mathfrak{R}$), die nur für die Fortsetzung von i *geeignet* ist, also die oft notierte Eigenschaft

$$|i(h)| \le \|h\| \qquad (h \in \mathfrak{E})$$

besitzt. Für die zugehörige Integralfortsetzung seien wieder die Bezeichnungen $\mathfrak{I}$ und i verwendet.

Mit der gleichen Argumentation wie in den schon behandelten Spezialfällen ergeben sich die Eigenschaften:

$$\wr$$
$$f \in \mathfrak{I} \implies |f| \in \mathfrak{I}, \quad |i(f)| \le i(|f|) \le \|f\|,$$
$$f, g \in \mathfrak{I} \implies f \vee g,\ f \wedge g \in \mathfrak{I},$$
$$i \text{ ist } \textit{positiv} \text{ auf } \mathfrak{I}, \text{ also } \textit{isoton},$$
$$A \in R(\mathbb{S}),\ f \in \mathfrak{I} \implies \chi_A f,\ \chi_{\widetilde{A}} f \in \mathfrak{I},$$
$$\|\ \| \ \textit{endlich} \text{ auf } \mathfrak{E} \implies \|\ \| \ \textit{endlich} \text{ auf } \mathfrak{I}.$$

Wie oben schon beschrieben, erklären wir

$$\mathbb{M} := \left\{ M \subset \mathfrak{R} : \chi_M \in \mathfrak{I} \right\}$$

und

$$\mu : \mathbb{M} \longrightarrow [0, \infty[$$

durch

$$\mu(M) := i(\chi_M) \qquad (M \in \mathbb{M}).$$

Dabei konnten wir die Bezeichnung μ verwenden, weil offenbar

$$R(\mathbb{S}) \subset \mathbb{M}$$

gilt, und die neue Abbildung Fortsetzung des ursprünglichen Inhalts auf $R(\mathbb{S})$ ist. Wir nennen die Mengen von $\mathbb{M}$ *„meßbare Mengen"*. Es gilt nun

$\mathbb{M}$ *ist ein Ring.* μ *ist ein klassischer Inhalt auf* $\mathbb{M}$.

Für die erste Aussage hat man nur

$$\chi_{M \cup N} = \chi_M \vee \chi_N, \quad \chi_{M \setminus N} = \chi_M - \chi_M \wedge \chi_N$$

zu beachten. Die Inhaltseigenschaft ist mit der Linearität von i gegeben; denn die charakteristische Funktion einer disjunkten Vereinigung ist die Summe der charakteristischen Funktionen der Komponenten. □

Vermerken sollten wir noch: *Ist eine Menge M in $\mathfrak{R}$ $\|\ \|$-Nullmenge, so gehört M zu $\mathbb{M}$ und es gilt $\mu(M) = 0$.* — Der Leser möge sich deutlich machen, daß die ihm vielleicht vertraute Umkehrung dieser Aussage hier, wo wir allein eine geeignete Integralnorm angenommen haben, allgemein nicht gilt. Sie ist dagegen sicher dann richtig, wenn noch vorausgesetzt wird, daß auf $\mathfrak{E}$ (und damit auf $\mathfrak{I}$) die Integralnorm mit dem Integral des Betrages übereinstimmt, wie dies speziell natürlich für die von uns betrachteten verallgemeinerten RIEMANN- und LEBESGUE-Integrale zutrifft.

Von besonderer Bedeutung sind im gegebenen Zusammenhang diejenigen Mengen in $\mathfrak{R}$, deren Durchschnitte mit allen Mengen des Prä-Ringes $\mathbb{S}$ meßbar sind. Wir bezeichnen diese als *„lokal-meßbar"* und definieren also

Kapitel 2

$$\mathbb{L} := \{ M \subset \mathfrak{R} : \forall A \in \mathbb{S}\ A \cap M \in \mathbb{M} \}.$$

Natürlich hat man, da $\mathbb{M}$ ein $\mathbb{S}$ umfassender Ring ist,

$$\mathbb{M} \subset \mathbb{L}.$$

Betrachtet man die Definition von $\mathbb{M}$ und geht zu den charakteristischen Funktionen über, so erkennt man: Eine Menge M ist lokal-meßbar genau dann, wenn alle Produkte von χ_M mit charakteristischen Funktionen von Mengen des Prä-Rings $\mathbb{S}$ integrierbar sind. Damit folgt aufgrund der Definition von $\mathfrak{E}$: M ist lokal-meßbar genau dann, wenn alle Produkte von χ_M mit Funktionen aus $\mathfrak{E}$ integrierbar sind. Schließlich ergibt die Abschätzung

$$\|\chi_M f - \chi_M g\| \leq \|f - g\|$$

noch: *M ist lokal-meßbar genau dann, wenn alle Produkte von χ_M mit Funktionen aus $\mathfrak{I}$ wieder zu $\mathfrak{I}$ gehören.* Mit dieser letzten Aussage erkennt man sofort:

$$\mathbb{L} = \{ M \subset \mathfrak{R} : \forall B \in \mathbb{M}\ B \cap M \in \mathbb{M} \}.$$

Damit nun ist zu erkennen: $\mathbb{L}$ *ist „Algebra", d. h. Ring, zu dem die Grundmenge $\mathfrak{R}$ selbst gehört.*

$\mathbb{M}$ *ist Ideal in* $(\mathbb{L}, \Delta, \cap)$.

Für beliebige Mengen $M \in \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ (‚Potenzmenge') kann man definieren:

$$\mu^*(M) := \|\chi_M\|.$$

Die Integralnormeigenschaften ergeben:

μ^* ist „äußerer Inhalt" auf $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$, d. h. man hat

$$\mu^* : \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \longrightarrow [0, \infty],$$
$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$
$$\textit{aus}\ M \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu\ \textit{folgt stets}\ \mu^*(M) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \mu^*(M_\nu).$$

Ergänzung

Jeder solche äußere Inhalt erzeugt in kanonischer Weise mit der Definition*

$$\delta(M, N) := \mu^*(M \triangle N) \quad \Big(= \|\chi_{M\triangle N}\| = \|\chi_M - \chi_N\| \Big)$$

eine *„Pseudometrik"* für die Teilmengen von $\mathfrak{R}$, d. h. δ hat die Eigenschaften einer Metrik mit Ausnahme der Endlichkeit und der Definitheit; δ liefert also Werte in $[0, \infty]$, den Wert 0 zumindest für $M = N$, ist symmetrisch und erfüllt die bekannte Dreiecksungleichung. Der Leser möge sich an die Übungsaufgabe (1.1) und speziell die Eigenschaften der symmetrischen Differenz ‚Δ' erinnern.

* Beachten: Für $M \triangle N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M) = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$ gilt $\chi_{M\triangle N} = |\chi_M - \chi_N|$.

Kapitel 2

Es gilt nun:

$\mathbb{M}$ ist die Gesamtheit derjenigen Teilmengen von $\mathfrak{R}$, die sich bezüglich der Pseudometrik δ durch Mengen $A \in R(\mathbb{S})$ beliebig gut approximieren lassen. Daher gehört auch jede Menge, die bezüglich δ beliebig gut durch Mengen $A \in \mathbb{M}$ approximiert werden kann, wieder zu $\mathbb{M}$.

Der Leser, der über einfache Grundkenntnisse der Topologie verfügt, wird dies sofort so formulieren: $\mathbb{M}$ *ist die abgeschlossene Hülle von* $R(\mathbb{S})$ *in der durch δ gegebenen Topologie für* $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$.

$\mathbb{M} = \overline{R(\mathbb{S})}^{\delta}$

Zum *Beweis* erkennt man zunächst rasch, daß die gegebene Bedingung hinreichend ist, weil die charakteristische Funktion jeder Menge aus $R(\mathbb{S})$ einfache Funktion ist. — Für den Nachweis der Notwendigkeit seien $\varepsilon > 0$ und h einfache Funktion mit

$$\|\chi_M - h\| < \varepsilon.$$

Man bildet dann etwa

$$A := \{ x \in \mathfrak{R} : h(x) \geq 1/2 \},$$

erkennt $A \in R(\mathbb{S})$ und bestätigt

$$\chi_{M\triangle A} \leq 2|\chi_M - h|, \quad \delta(M, A) = \|\chi_{M\triangle A}\| \leq 2\varepsilon.$$

Die notierte ‚*Abgeschlossenheit*' von $\mathbb{M}$ folgt dann, wie gewohnt, mit der Dreiecksungleichung für δ. □

Weiter erkennt man auch:

$\mathbb{L}$ *ist ‚δ-abgeschlossen'.*

Zum *Beweis* kombiniert man die Definition von $\mathbb{L}$ mit der Abschätzung

$$\delta(A \cap M, A \cap N) \leq \delta(M, N),$$

hier speziell für $A \in R(\mathbb{S})$. □

Die Abschätzung der Integrale durch die Integralnorm für alle integrierbaren Funktionen läßt speziell

$$|\mu(M) - \mu(N)| \leq \delta(M, N)$$

erkennen. Damit bestätigt man — etwas mehr ‚topologisch' gesagt — :

Der Inhalt μ auf $\mathbb{M}$ ist die eindeutige δ-stetige Fortsetzung des Inhalts μ auf $R(\mathbb{S})$.

So weit unsere allgemeineren Überlegungen, auf die wir speziell später beim verallgemeinerten LEBESGUE-Integral zurückkommen.

Kapitel 2

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall der (verallgemeinerten) RIEMANN-DARBOUX-Norm und damit des eigentlichen RIEMANN-Integrals. Die Mengen von $\mathbb{M}$, gelegentlich genauer $\mathbb{M}_R$, werden hier als *„(eigentlich)* JORDAN-*meßbar“*, die Inhaltsfortsetzung $\mu_R := \mu$ als „JORDAN-*Inhalt*“ und entsprechend die Mengen von $\mathbb{L}_R := \mathbb{L}$ als *„lokal* JORDAN-*meßbar“* bezeichnet. Dazu notieren wir gelegentlich deutlicher μ_R^* statt μ^*.

Hier gilt in Analogie zur Definition der RIEMANN-DARBOUX-Norm für alle $M \subset \mathfrak{R}$

$$\mu_R^*(M) = \inf \{ \mu(A) : R(\mathbb{S}) \ni A \supset M \} .$$

Ist nämlich $h \in \mathfrak{E}$ mit $\chi_M \leq h$, so setzt man

$$A := \{ x \in \mathfrak{R} : h(x) \geq 1 \} \in R(\mathbb{S})$$

und hat

$$A \supset M, \qquad \mu(A) \leq i(h) .$$

Daraus ist die gewünschte Charakterisierung von μ_R^* ablesbar. □

Es gibt hier eine enge Beziehung zur anschaulichen Erklärung des RIEMANN-Integrals oder zu elementaren Beschreibungen von Flächeninhalten oder Volumina:

Eine Menge $M \subset \mathfrak{R}$ ist genau dann JORDAN-*meßbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Einschließung*

$$U \subset M \subset O$$

zwischen Mengen aus $R(\mathbb{S})$ derart existiert, daß

$$\mu(O \setminus U) < \varepsilon .$$

Zum *Beweis* kann man nach dem zuvor Notierten $M \in \mathbb{M}$ durch die Eigenschaft charakterisieren, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Mengen $A, B \in R(\mathbb{S})$ existieren mit

$$M \triangle A \subset B, \qquad \mu(B) < \varepsilon .$$

Für $O := A \cup B$ und $U := A \setminus B$ hat man dann eine Einschließung der genannten Art; umgekehrt wählt man zu einer solchen $A := U$ und $B := O \setminus U$. □

Eine Folgerung aus dem eben Gezeigten ist

$$\mu_R^*(M) = \mu_R(M) = \sup\{ \mu(U) : R(\mathbb{S}) \ni U \subset M \} \qquad \big(M \in \mathbb{M}_R\big).$$

Auslassung ....

2.4 Verallgemeinertes Lebesgue-Integral

Unser Ziel ist im folgenden, die Einführung des LEBESGUE-Integrals im Kapitel 1 in entsprechender Weise zu verallgemeinern, wie wir dies eben für das eigentliche und uneigentliche RIEMANN-Integral durchgeführt haben. Wir gehen also wieder von der gleichen Grundsituation aus: Es seien

$\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge,

$\mathbb{S}$ ein Prä-Ring von Teilmengen von $\mathfrak{R}$,

μ klassischer Inhalt auf $\mathbb{S}$ und

$\{0\} \neq \mathfrak{B}$ ein $\mathbb{K}$-BANACH-Raum, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Dazu seien $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{E}^+$, $i_{\mathfrak{B}}$ und $i := i_{\mathbb{R}}$ wie oben erklärt.

Man kann dann immer, ganz analog zum Spezialfall des Kapitels 1, für $f \in \mathfrak{F}$ definieren

$$\|f\| := \|f\|_L := \inf \{ \sup i(h_n) : h_n \in \mathfrak{E}^+,\ h_n \uparrow\geq |f| \},$$

wobei hier — im Spezialfall trat das an dieser Stelle nicht auf — $\inf \emptyset := \infty$ zu beachten ist.* Wegen der Additivität von i ist auch ausführen!

$$\|f\|_L = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} i(k_n) : k_n \in \mathfrak{E}^+,\ \sum_{n=1}^{\infty} k_n \geq |f| \right\}.$$

Man bestätigt wie im Kapitel 1:

$\| \ \|_L$ ist stets eine starke Integralnorm.

Statt der endlichen Subadditivität (2) gilt also sogar die σ-Subadditivität (2+). Wir bezeichnen $\| \ \|_L$ als *(verallgemeinerte)* „LEBESGUE-*Norm*“.

Im allgemeinen wird nun aber, wie eine einfache Übungsaufgabe zeigt, diese Integralnorm *nicht* zur Fortsetzung von $i_{\mathfrak{B}}$ *‚geeignet‘* sein, d. h. es wird nicht

(4) $$\big|i_{\mathfrak{B}}(h)\big| \leq \|h\| \qquad (h \in \mathfrak{E})$$

gelten. Wir wollen daher überlegen, wann diese Eigenschaft gegeben ist. Vorweg bemerken wir (konstante Folge heranziehen!):

Immer gilt: $\|h\|_L \leq i(h) \qquad (h \in \mathfrak{E}^+)$

Dann erkennt man sofort: ausführen!

$\| \ \|_L$ ist geeignet genau dann, wenn diese Integralnorm auf $\mathfrak{E}^+$ mit i übereinstimmt.

Daraus wiederum erkennt man ähnlich wie im Spezialfall des Kapitels 1: ausführen!

* $\|f\|$ hängt wieder nur von $|f|$ ab, ist insbesondere also unabhängig von $\mathfrak{B}$.

$\| \|_L$ ist geeignet genau dann, wenn das elementare Integral i bei 0 absteigend stetig ist,

d. h., wenn die dem Haupthilfssatz im klassischen Falle entsprechende Eigenschaft gilt

(D) $\mathfrak{E}^+ \ni h_n \downarrow 0 \implies i(h_n) \downarrow 0\,.$

ausführen! Aus der zweiten Darstellung von $\| \|_L$ liest man überdies ab:

$\| \|_L$ ist geeignet genau dann, wenn es überhaupt eine starke Integralnorm gibt, die auf $\mathfrak{E}^+$ mit i übereinstimmt.

In diesem Fall hat $\| \|_L$ also ebenfalls diese Eigenschaft und, was bemerkenswert ist, dies *ist dann die größte derartige starke Integralnorm.*

Kapitel 2

Von besonderem Interesse ist nun die Möglichkeit, die Tatsache, daß $\| \|_L$ geeignet ist, schon durch eine einfache Eigenschaft des Inhalts μ zu charakterisieren.

Wir nennen dazu einen klassischen (d. h. endlichwertigen nicht-negativen) Inhalt ein *„Maß“*, genauer *„klassisches Maß“*, wenn nicht nur die endliche Additivität, sondern stärker die *„σ-Additivität“* gilt:

Ist eine Menge A aus $\mathbb{S}$ disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Mengen A_n aus $\mathbb{S}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, so gilt

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Bemerkenswert ist nun:

Es sind äquivalent:

(a) μ *ist ein Maß auf* $\mathbb{S}$,

(b) μ *ist ein Maß auf* $R(\mathbb{S})$,

(c) i *erfüllt die Eigenschaft (D),*

(d) $\| \|_L$ *ist für* i *geeignet.*

Dazu haben wir oben die Äquivalenz von (c) und (d) schon erkannt.

ausführen! (b) $\implies$ (a) ist trivial. (c) $\implies$ (b): ... Den Nachweis von (a) $\implies$ (b) führt man in zwei Schritten. Zuerst wird gezeigt, daß

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt, wenn $A \in \mathbb{S}$ und $A_n \in R(\mathbb{S})$. Man überlegt dazu, daß jedes A_n disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathbb{S}$ ist. A ist dann disjunkte Vereinigung der abzählbar vielen so gegebenen Mengen. Hier gilt nach Annahme (a) die σ-Additivität. Durch entsprechendes Setzen von Klammern in der erhaltenen Reihe für $\mu(A)$ entsteht dann die gewünschte Zwischenbehauptung. Damit nun kann man den Fall, daß auch $A \in R(\mathbb{S})$, rasch durch geeignete Zerlegung

gewinnen: Ist nämlich A disjunkte Vereinigung der Mengen $B_1, B_2, \cdots, B_k$ aus $\mathbb{S}$, so hat man aufgrund des eben Gezeigten

$$\mu(B_\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_\kappa)\,.$$

Summiert man dann gliedweise über κ, so entsteht offenbar die behauptete Gleichung. — Um jetzt schließlich (b) $\implies$ (c) zu erhalten, stützt man sich zweckmäßig auf die (für einen klassischen Inhalt) äquivalente Eigenschaft ausführen!

$$R(\mathbb{S}) \ni M_n \downarrow \emptyset \implies \mu(M_n) \downarrow 0\,.$$

Sei nun also (h_n) eine Folge aus $\mathfrak{E}^+$ mit $h_n \downarrow 0$ und $\varepsilon > 0$. Man bildet dann

$$M_n := \big\{ x \in \mathfrak{R} : h_n(x) > \varepsilon \big\} \in R(\mathbb{S})$$

und schätzt mit $\big|f\big|_\infty := \sup \big\{ \big|f(x)\big| : x \in \mathfrak{R} \big\}$ (für $f \in \mathfrak{F}$)

$$h_n \le \varepsilon \cdot \chi_{Tr\, h_n} + \big|h_n\big|_\infty \cdot \chi_{M_n} \le \varepsilon \cdot \chi_{Tr\, h_1} + \big|h_1\big|_\infty \cdot \chi_{M_n}$$

ab. Wegen $M_n \downarrow \emptyset$ gilt nun $\mu(M_n) < \varepsilon$ für genügend große n. Für diese folgt dann aus der vorangehenden Abschätzung

$$i(h_n) \le \Big(\mu(Tr\, h_1) + \big|h_1\big|_\infty \Big) \cdot \varepsilon\,.$$

Das ergibt $i(h_n) \downarrow 0$, was zu zeigen war. □

Kapitel 2

Im folgenden sei nun die LEBESGUE-Norm $\| \| := \| \|_L$ für $i_{\mathfrak{B}}$ geeignet bzw., was wir eben als äquivalent erkannt haben, μ Maß. Dann kann also $i_{\mathfrak{B}}$ gemäß dem Fortsetzungsprinzip mit Hilfe von $\| \|$ fortgesetzt werden. Wir erhalten damit das *(verallgemeinerte)* „LEBESGUE-*Integral*“, das wir wieder mit $i_{\mathfrak{B}}$ bezeichnen. Den Raum der entsprechenden ‚LEBESGUE-*integrierbaren*‘ *Funktionen* $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$ werden wir gelegentlich auch genauer durch den Index L kennzeichnen, ebenso für $i_{\mathfrak{B}}$.

Wir vermerken, daß offenbar

$$\| \|_L \le \| \|_R$$

gilt, so daß die gewohnte Vergleichsüberlegung das LEBESGUE-*Integral* als *Fortsetzung des* RIEMANN-*Integrals* erweist.

Für das so eingeführte verallgemeinerte LEBESGUE-Integral gelten mit fast identischen Formulierungen und Beweisen wie im klassischen Spezialfall:

Aussagen über Nullfunktionen und Nullmengen,*

* (die ersten vier Aussagen dazu auf S. 31 f)

Erster Konvergenzsatz,
Vollständigkeitssatz,
Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\| \; \|$,
Konvergenzsatz von LEVI *I* (LEVI $\sum$),
Konvergenzsatz von LEVI *II* (LEVI $\uparrow$) *(für* $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$*)*,
Satz von FATOU *(für* $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$*)*,
Norm-Hüllen-Satz (für $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$*)*,
Norm-Limes-Satz.

Dabei sind nur die Integrale immer mit $i_{\mathfrak{B}}$ bzw. i zu schreiben.

Der **Konvergenzsatz von** LEBESGUE kann hier in der folgenden Form gezeigt werden:

Vor.: $f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$; $f_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$; $g \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathbb{R})$ *mit* $\|g\| < \infty$,
$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *f.ü.;* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *f.ü.*

Beh.: $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$, $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, $i_{\mathfrak{B}}(f_n) \longrightarrow i_{\mathfrak{B}}(f)$

Beweis: Nach der ‚Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\| \; \|$' genügt der Nachweis, daß (f_n) eine $\| \; \|$-CF ist; denn dann gilt: $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, woraus man die Behauptung abliest.
Nach LEVI $\uparrow$ gilt $(\ldots)$: $g_n := \sup\left\{|f_\nu - f_\mu| : \mathbb{N} \ni \nu, \mu \geq n\right\} \in \mathfrak{I}(\mathbb{R})$; $g_n(x) \downarrow 0$ f.ü., nach LEVI $\downarrow$ folgt daher $\|g_n\| \longrightarrow 0$, also ist — da $\|f_\nu - f_\mu\| \leq \|g_n\|$ für $\nu, \mu \geq n$ — (f_n) eine $\| \; \|$-CF. $\square$

Der Norm-Limes-Satz zeigt unmittelbar:

Ist eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ *durch eine aufsteigende Folge* $h_n \in \mathfrak{E}^+$ *betraglich majorisierbar, bzw., was äquivalent ist, kann* $\operatorname{Tr} f$ *durch eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus* $\mathbb{S}$ *überdeckt werden — wir nennen dann* f *bzw.* $\operatorname{Tr} f$ *„σ-endlich" (bezüglich* $\mathfrak{E}$ *bzw.* $\mathbb{S}$*) — , so ist*

$$\|f\|_L = \sup\left\{ \|h \wedge |f|\,\|_L : h \in \mathfrak{E}^+ \right\} \leq \|f\|_{R,\ell}\,.$$

So ist erkennbar:

Ist $\mathfrak{R}$ *σ-endlich, so erweitert das* LEBESGUE*-Integral auch das uneigentliche* RIEMANN*-Integral.*

Ergänzung

Genauer gilt: *Eine Funktion aus* $\mathfrak{I}_{R,\ell}$*, die σ–endlich ist, ist* LEBESGUE *integrierbar.*

Man vergleiche hierzu auch Übungsaufgabe (2.4.8).

2.5 Verallgemeinertes Lebesgue-Maß

Wir haben oben — im Abschnitt über den verallgemeinerten JORDAN-Inhalt — allgemein die mit einer Integralerweiterung durch eine geeignete Integral-

norm verbundene Fortsetzung eines Inhalts untersucht. Im folgenden betrachten wir speziell die Inhaltserweiterung im Zusammenhang mit dem verallgemeinerten LEBESGUE-Integral. Dies führt uns in die Theorie des „LEBESGUE-*Maßes*", die für viele Fragen der Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik grundlegende Bedeutung hat. Wir gliedern zweckmäßig unsere Darstellung derart, daß wir nach der Schilderung der Grundsituation und Notierung der Definitionen zunächst diejenigen Eigenschaften wiederholen, die sich oben schon allgemein ergaben, und danach die wesentlichen Ergänzungen für den betrachteten Spezialfall bringen.

Wir gehen also aus von einem Prä-Ring $\mathbb{S}$ innerhalb einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und — gemäß den Überlegungen des vorangehenden Abschnittes — von einem klassischen *Maß* μ auf $\mathbb{S}$. Dazu bilden wir, wie eben dargestellt, mit Hilfe der LEBESGUE-Integralnorm $\| \; \|$ das (verallgemeinerte) LEBESGUE-Integral $i = i_{\mathbb{R}}$ auf dem Raum der LEBESGUE-integrierbaren Funktionen $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathbb{R})$.

Wie oben allgemein ausgeführt, betrachten wir das System der meßbaren Mengen

$$\mathbb{M} := \left\{M \subset \mathfrak{R} : \chi_M \in \mathfrak{I}\right\}$$

und die durch

$$\mu(M) := i(\chi_M)$$

definierte Mengenfunktion

$$\mu : \mathbb{M} \longrightarrow [0, \infty[\,.$$

Dazu erklären wir das System der lokal-meßbaren Mengen

$$\mathbb{L} := \{M \subset \mathfrak{R} : \forall A \in \mathbb{S} \;\; A \cap M \in \mathbb{M}\}$$

und bilden schließlich zur LEBESGUE-Norm

$$\mu^*(M) := \|\chi_M\| \qquad \big(M \in \mathbb{P}(\mathfrak{R})\big).$$

Wir wissen dann aus unseren allgemeinen Überlegungen:

$\mathbb{M}$ *ist ein Ring, der* $R(\mathbb{S})$ *umfaßt.* μ *ist ein klassischer Inhalt, der das gegebene Maß auf* $\mathbb{S}$ *fortsetzt.* $\mathbb{L}$ *ist eine* $\mathbb{M}$ *umfassende Algebra.* μ^* *ist ein äußerer Inhalt auf* $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$.

Dazu hatten wir schon erkannt:

μ^* *erzeugt mit der Definition*

$$\delta(M, N) := \mu^*(M \triangle N)$$

eine Pseudometrik auf $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$. $\mathbb{M}$ *ist die Abschließung von* $R(\mathbb{S})$ *bezüglich dieser Pseudometrik, und* μ *ist auf* $\mathbb{M}$ *bezüglich* δ *gleichmäßig stetig,*

Kapitel 2

$$\left|\mu(M) - \mu(N)\right| \leq \delta(M, N),$$

und daher die eindeutige stetige Fortsetzung des Inhaltes, hier also Maßes, auf $R(\mathbb{S})$.

Schließlich war auch

$$\mathbb{L} = \left\{M \subset \mathfrak{R} : \forall A \in \mathbb{M}\ A \cap M \in \mathbb{M}\right\}.$$

Aufgrund der Maß-Eigenschaft von μ auf $\mathbb{S}$ und der daraus resultierenden Eigenschaften der LEBESGUE-Integralnorm und des LEBESGUE-Integrals erkennen wir nun rasch zahlreiche weitere bemerkenswerte Aussagen.

Kapitel 2

Zunächst zeigen wir:

μ *ist ein Maß auf* $\mathbb{M}$.

Dazu haben wir Mengen M_n und M in $\mathbb{M}$ zu betrachten derart, daß M die disjunkte Vereinigung der abzählbar vielen Mengen M_n ist. Man schreibt um zu

$$\chi_M = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n}.$$

Dies ist nach Definition von $\mathbb{M}$ eine Relation mit integrierbaren nicht-negativen Funktionen. Man kann zum Beispiel den Satz von LEVI $\sum$ anwenden und erhält

$$\mu(M) = i(\chi_M) = \sum_{n=1}^{\infty} i(\chi_{M_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n). \qquad \square$$

Aufgrund dieser Tatsache bezeichnen wir μ auf $\mathbb{M}$ als *verallgemeinertes „*LEBESGUE-*Maß"*.

Noch einfacher ist die Feststellung:

μ^* *ist ‚äußeres Maß'.*

Damit ist gemeint: μ^* ist sogar ‚σ-*subadditiv*' auf $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$:

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \implies \mu^*(M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n).$$

Man schreibt dazu die Voraussetzung um zur Ungleichung

$$\chi_M \leq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n}$$

und wendet die σ-Subadditivität der LEBESGUE-Norm an. $\square$

Der Konvergenzsatz von LEVI $\uparrow$ ergibt darüber hinaus noch eine weitere Struktureigenschaft von $\mathbb{M}$:

Hat man eine aufsteigende Folge von Mengen M_n *in* $\mathbb{M}$ *derart, daß die Maße* $\mu(M_n)$ *beschränkt bleiben, so gehört die Vereinigungsmenge* M *aller* M_n *ebenfalls zu* $\mathbb{M}$. *Dazu gilt dann*

$$\delta(M, M_n) \longrightarrow 0, \qquad \mu(M_n) \uparrow \mu(M).$$

Zum *Beweis* betrachtet man die charakteristischen Funktionen der M_n, die nicht-fallend gegen die charakteristische Funktion von M konvergieren, während ihre Integrale beschränkt bleiben, und wendet den Satz von LEVI $\uparrow$ an.

Kapitel 2

Eine einfache Folgerung ist:

$\mathbb{M}$ *ist ein ‚δ-Ring';*

dies bedeutet: ein gegen die Bildung abzählbarer Durchschnitte abgeschlossener Ring. — Das ‚δ' ist hier natürlich *kein* Hinweis auf die gleich benannte Pseudometrik; ein Mißverständnis sollte ausgeschlossen sein.

Bekannt ist: $\mathbb{M}$ ist ein Ring. Zum *Beweis* der zusätzlichen Eigenschaft betrachtet man für $(A_n) \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ Änderung

$$\mathbb{M} \ni M_n := \bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu \downarrow M := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu.$$

Man hat dann $\mathbb{M} \ni M_1 \setminus M_n \uparrow M_1 \setminus M$, also — unter Beachtung von $\mu(M_1 \setminus M_n) \leq \mu(M_1) < \infty$ — nach der obigen Überlegung $M_1 \setminus M \in \mathbb{M}$ und so schließlich $M = M_1 \setminus (M_1 \setminus M) \in \mathbb{M}$. $\square$

Mit der letzten Aussage ergibt die Definition von $\mathbb{L}$ oder auch die notierte zweite Charakterisierung durch die Schnitte mit Mengen aus $\mathbb{M}$ sofort die weitergehende Eigenschaft von $\mathbb{L}$: ausführen!

$\mathbb{L}$ *ist eine ‚σ-Algebra',*

d. h. Algebra und zusätzlich abgeschlossen gegen Bildung von abzählbaren Vereinigungen, damit natürlich auch von abzählbaren Durchschnitten.

Als Teilsystem von $\mathbb{L}$ läßt sich $\mathbb{M}$ einfach charakterisieren durch die Eigenschaft endlichen äußeren Maßes:

$$\mathbb{M} = \{ M \in \mathbb{L} : \mu^*(M) < \infty \}.$$

Hier zeigen wir zuerst die Inklusion ‚$\supset$'. Dazu geht man aus von einer Majorisierung der Funktion χ_M durch eine aufsteigende Folge von nicht-negativen einfachen Funktionen, die wegen $\|\chi_M\| = \mu^*(M) < \infty$ gewiß existiert. Bezeichnet man die Trägermengen dieser einfachen Funktionen mit A_n $(n \in \mathbb{N})$, so gehören wegen $M \in \mathbb{L}$ die Durchschnitte $M \cap A_n$ zu $\mathbb{M}$. Sie bilden eine aufsteigende Folge, deren Vereinigungsmenge M ist. Dabei bleiben die Werte der Maße $\mu(M \cap A_n)$ offenbar durch $\mu^*(M) < \infty$ beschränkt. Damit kann man die oben notierte Eigenschaft von $\mathbb{M}$ anwenden und hat, wie zu zeigen war, $M \in \mathbb{M}$. — Die umgekehrte Inklusion ‚$\subset$' und damit ‚$=$' ist wegen $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ durch die schon gelegentlich benutzte Bemerkung gegeben:

$$\mu^*(M) = \mu(M) \qquad (M \in \mathbb{M}),$$

was natürlich der Tatsache entspricht, daß für integrierbare Funktionen die Integralnorm mit dem Integral des Betrages übereinstimmt. □

Einige der zuletzt erhaltenen Eigenschaften lassen sich zweckmäßig und elegant zusammenfassen:

Schränkt man das äußere Maß μ^* ein auf die σ-Algebra $\mathbb{L}$, so ist die entstehende Mengenfunktion $\big($mit Werten in $[0, \infty]\big)$ σ-additiv, also in entsprechend verallgemeinertem Sinne ein Maß, und Fortsetzung des (endlichwertigen) Maßes μ auf $\mathbb{M}$.

Ausdrücklich weisen wir darauf hin, daß in fast allen Darstellungen der LEBESGUEschen Maß- und Integrationstheorie die σ-Algebra $\mathbb{L}$ und das eben angesprochene ‚Maß' mit Werten in $[0, \infty]$ auf $\mathbb{L}$ die primäre Rolle spielen. So werden dort die Mengen aus $\mathbb{L}$ als ‚meßbar' bezeichnet, und unsere meßbaren Mengen $\big(\mathbb{M}\big)$ sind dort die ‚meßbaren Mengen endlichen Maßes'. — Unsere vom Üblichen deutlich abweichende Bezeichnungs- und Vorgehensweise begründet sich nicht nur durch die Methodik, die Maßerweiterung als Nebenergebnis der Integralfortsetzung mit Hilfe der LEBESGUE-Norm zu gewinnen, sondern vor allem auch durch die einfachen Verallgemeinerungen auf *vektorwertige* Funktionen und *Maße,* wo eben Maß und äußeres Maß völlig verschiedene Dinge sind. Man kann sagen, daß manche Schwächen der gewohnten Darstellungen der Maßtheorie, so auch die eben angesprochene mangelnde Verallgemeinerungsfähigkeit, gerade darin begründet sind, daß das endliche Maß einerseits und das die topologischen Aspekte induzierende äußere Maß andererseits nicht genügend differenziert erscheinen. — Wir bitten also den Leser, gegebenenfalls an diese Bezeichnungsabweichungen zu denken.

Mit einigen der topologischen Aspekte, die mit der Pseudometrik δ und damit mit μ^* zusammenhängen, wollen wir uns im folgenden kurz beschäftigen.

Vorweg notieren wir noch eine Darstellung für μ^*, die derjenigen entspricht, die wir oben für den äußeren JORDAN-Inhalt erhalten haben:

$$\mu^*(M) \;=\; \inf\Big\{\sup_k \mu(B_k) \;:\; R(\mathbb{S}) \ni B_k \uparrow\supset M\Big\},$$

oder auch, äquivalent dazu,

$$(*) \qquad \mu^*(M) \;=\; \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;:\; A_n \in \mathbb{S}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset M\Big\}.$$

Dabei bedeutet $B_k \uparrow\supset M$ natürlich $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \quad \wedge \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset M$.

Beweis: Um von einer aufsteigenden Folge einfacher Funktionen (h_k), deren Supremum χ_M majorisiert, während

$$i(h_k) \;\le\; \mu^*(M) + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

beschränkt bleiben, zu einer geeigneten Mengenfolge B_k zu kommen, wählt man etwa

$$B_k \;:=\; \Big\{x \in \mathfrak{R} \,:\, h_k(x) \ge 1 - \varepsilon\Big\}$$

und zeigt

$$\mu(B_k) \;\le\; \frac{1}{1-\varepsilon}\,\big(\mu^*(M) + \varepsilon\big).$$

Der Rest ergibt sich durch Routine-Überlegungen. □

Als eine Folgerung notieren wir:

Für eine Menge $M \subset \mathfrak{R}$ sind äquivalent:

- *M ist eine LEBESGUE-Nullmenge,*
- *M ist meßbar und hat das Maß 0,*
- *$\mu^*(M) = 0$,*
- *zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung von M durch abzählbar viele Mengen aus $\mathbb{S}$ derart, daß die Summe ihrer Maße kleiner als ε ist.*

Aus den Darstellungen von μ^*, die wir eben notiert haben, ergeben sich mit ganz analogem Beweise zwei Sätze, die dem Norm-Hüllen-Satz und dem Norm-Limes-Satz voll entsprechen:

Hüllen-Satz:
Zu einer Teilmenge W von $\mathfrak{R}$ mit $\mu^*(W) < \infty$ gibt es stets eine meßbare Menge $M \supset W$ mit $\mu(M) = \mu^*(W)$.

Limes-Satz:
Für Teilmengen M_n, M von $\mathfrak{R}$ mit $M_n \uparrow M$ gilt stets $\mu^*(M_n) \uparrow \mu^*(M)$.

Für die Beweise und Ergänzungen empfehlen wir die zugehörigen Übungsaufgaben.

Bezüglich der ‚δ-Topologie' wollen wir nun als bemerkenswerte Resultate zeigen:

$\mathbb{P}(\mathfrak{R})$ *ist vollständig,*
$\mathbb{M}$ *ist vollständig,*

$\mathbb{L}$ *ist vollständig.*

Den *Beweis* der ersten Aussage können wir einfach auf den Vollständigkeitssatz und die Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\| \; \|$ stützen: Hat man eine CAUCHY-Folge bezüglich δ von Mengen M_n, so geht man über zu den charakteristischen Funktionen. Mit

$$\delta(M,\, N) = \|\chi_M - \chi_N\|$$

erkennt man diese als CAUCHY-Folge bezüglich $\| \; \|$. Nach den erwähnten Sätzen gibt es eine Funktion f, gegen die diese Funktionen bezüglich $\| \; \|$ konvergieren; andererseits gibt es eine Teilfolge dieser charakteristischen Funktionen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Daher hat f fast überall nur Werte 0 oder 1. Nach entsprechender Abänderung kann also f als charakteristische Funktion einer Menge M gewählt werden. Die oben verwendete Gleichung läßt dann die δ-Konvergenz der Mengen M_n gegen M erkennen.* Daß $\mathbb{M}$ und $\mathbb{L}$ vollständig sind, erkennt man ebenso wie oben die Vollständigkeit von $\mathfrak{I}$: Beide Mengensysteme sind bezüglich δ abgeschlossene Teilmengen des vollständigen $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$ und daher ebenfalls vollständig. $\square$

Änderung

An dieser Stelle sollten wir etwas zu der in der Literatur verbreiteten anderen Darstellungsweise der Theorie des LEBESGUE-Maßes sagen: Für die Erweiterung eines *Maßes* μ auf einem Prä-Ring $\mathbb{S}$ (oder vielmehr meist schon auf einem Ring) geht man dort so vor, daß man die obige Gleichung $(*)$ als Definition von μ^* zugrunde legt und zunächst zeigt, daß μ^* *äußeres Maß* ist, das μ *fortsetzt*.

Durch die $\boxed{\text{CARATHÉODORY-Bedingung}}$

$$\mu^*(W) \;=\; \mu^*(W \cap L) + \mu^*(W \setminus L) \quad \textit{für alle Mengen} \;\; W \;\; \textit{aus} \;\; \mathbb{P}(\mathfrak{R})$$

wird $\mathbb{L}$ — $L \in \mathbb{L}$ — erklärt. Man rechnet — mühsam — nach, daß $\mathbb{L}$ eine *σ-Algebra* ist, die $\mathbb{S}$ umfaßt. Die Einschränkung von μ^* auf $\mathbb{L}$ ist dann als *σ-additiv* nachzuweisen.

Wir kommen auf diese Charakterisierung von $\mathbb{L}$ in einer Übungsaufgabe zurück.

Es wir schnell deutlich, wieviel an Aufwand auf einem solchen Wege erforderlich ist und wieviel an weiteren Überlegungen noch einmal investiert werden muß, um die Natur von $\mathbb{M}$ und $\mathbb{L}$ im Zusammenhang mit $\mathbb{S}$, die bei der CARATHÉODORY-Bedingung eben völlig verschleiert ist, schließlich sichtbar zu machen. Als Ausgangspunkt für einen Zugang, der einerseits einfach ist

* Man kann übrigens den Beweis auch mehr direkt, ohne den Übergang zu den Funktionen, führen, indem man den Grundgedanken für den Beweis des Vollständigkeitssatzes für Funktionen entsprechend überträgt, wobei natürlich ein geeignetes M zweckmäßig zu definieren ist (Übungsaufgabe).

und andererseits die Strukturen deutlich macht, erscheint die CARATHÉODORY-Bedingung ziemlich ungeeignet.

Meist wird dann auf einer Maßtheorie der eben geschilderten Art zunächst noch eine umfangreiche Betrachtung *‚meßbarer Funktionen'* aufgebaut, um dann erst, wieder relativ kompliziert, zum LEBESGUE-Integral zu gelangen. Man hat so eine *Vielzahl* von — zum Teil nicht-trivialen — *Erweiterungsschritten.* — Das Argument der Notwendigkeit eines ganz anderen Zugangs für den Fall der Verallgemeinerung auf vektorwertige Funktionen und Maße — wir haben schon darauf hingewiesen — sollte man nicht vergessen.

Im folgenden werden wir die eben mit der LEBESGUE-Norm eingeführten μ, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{L}$, die wir unterscheidend mit dem Index L versehen, mit den entsprechenden Bildungen im Rahmen der Betrachtung des eigentlichen und uneigentlichen JORDAN-Inhalts vergleichen. Dazu braucht man natürlich nur die schon bekannten Aussagen über die Integrale und die integrierbaren Funktionen im wesentlichen auf die charakteristischen Funktionen einzuschränken. Man erhält so die folgenden Aussagen:

ausführen!

- *Stets ist* μ_L *eine Fortsetzung von* μ_R *und*

$$\mathbb{M}_R \subset \mathbb{M}_L\,, \qquad \mathbb{L}_{R,\,\ell} = \mathbb{L}_R \subset \mathbb{L}_L\,.$$

- *Ist eine uneigentlich* JORDAN*-meßbare Menge zugleich σ-endlich, so ist sie auch* LEBESGUE*-meßbar.*
- *Ist daher* $\mathfrak{R}$ σ-endlich, *so ist auch* μ_L *eine Fortsetzung von* $\mu_{R,\,\ell}$. *Also gilt dann*

$$\mathbb{M}_R \subset \mathbb{M}_{R,\,\ell} \subset \left\{ \begin{matrix} \mathbb{L}_R = \mathbb{L}_{R,\,\ell} \\ \mathbb{M}_L \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{L}_L\,.$$

Der Leser möge sich an die Übungsaufgabe erinnern, die gerade auch für diese Situation im Falle einer nicht σ-endlichen Grundmenge $\mathfrak{R}$ ein Beispiel für $\mathbb{M}_{R,\,\ell} \not\subset \mathbb{M}_L$ gibt.

Wir verzichten hier auf die entsprechenden Überlegungen im Zusammenhang mit der lokalen LEBESGUE-Norm.

2.6 Meßbare und lokal-meßbare Funktionen

Im Rahmen der eben entwickelten Theorie des verallgemeinerten LEBESGUE-Integrals — mit dem Ausgangspunkt eines (klassischen) Maßes auf einem Prä-Ring — erfordert die Behandlung ‚meßbarer Funktionen' etwas mehr Sorgfalt als im Spezialfall der Intervall-Länge im Kapitel 1. Dort äquivalente Charakterisierungen liefern nämlich in der Verallgemeinerung nicht mehr die gleichen

Funktionenmengen. Vielmehr spielt jetzt der Begriff der ‚σ-Endlichkeit' von Mengen bzw. Funktionen eine entscheidende Rolle.

Änderung!

Wir beschränken uns hier auf den Fall $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$. Im allgemeinen Fall müßten nur noch Beschneidungen $h \owedge f$ geeignet verallgemeinert und einfache Eigenschaften dazu zusammengestellt werden.

Wir beginnen mit den folgenden vier Definitionen:

(vgl. S 26) Ergänzung

Eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ heißt *„lokal-meßbar"*, wenn für jede Funktion $h \in \mathfrak{E}^+$ die Beschneidung $h \owedge f$ integrierbar ist. Wir könnten also auch sagen: $\mathfrak{E}$-lokal LEBESGUE-integrierbar.

Eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ heißt *„meßbar"*, wenn sie Limes fast überall einer Folge von einfachen Funktionen ist.

Eine Menge M in $\mathfrak{R}$ heißt *„σ-endlich"*, wenn sie sich in eine abzählbare Vereinigung von Mengen des Prä-Rings $\mathbb{S}$ einschließen läßt.

Eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ heißt *„σ-endlich"*, wenn ihr Träger σ-endlich ist.

Diesbezüglich erhält man relativ rasch eine Reihe einfacher Sätze oder Bemerkungen:

(a) *f ist σ-endlich genau dann, wenn es eine nicht-fallende Folge nicht-negativer einfacher Funktionen h_n gibt, deren Supremum $|f|$ majorisiert.*
Damit hat man zugleich punktweise $h_n \owedge f \longrightarrow f$ und $h_n \wedge |f| \uparrow |f|$. — Eine Funktion f mit $\|f\| < \infty$ ist daher stets σ-endlich. — Jede Menge mit endlichem äußeren Maß ist σ-endlich.

(b) *Ein Limes f. ü. von σ-endlichen Funktionen ist σ-endlich.*

(c) *f ist meßbar genau dann, wenn f Limes f. ü. einer Folge integrierbarer Funktionen ist.*

(d) *Ein Limes f. ü. einer Folge von lokal-meßbaren Funktionen ist lokal-meßbar.*

(e) *f ist meßbar genau dann, wenn f lokal-meßbar und σ-endlich ist.* Die beiden Begriffe fallen also genau dann zusammen, wenn $\mathfrak{R}$ σ-endlich ist, wie etwa im Falle des Intervall-Systems in $\mathbb{R}$.

Änderung!

(f) *Ein Limes f. ü. einer Folge von meßbaren Funktionen ist meßbar.*

(g) *Ist f lokal-meßbar, so sind auch alle Beschneidungen mit nicht-negativen integrierbaren Funktionen integrierbar.*

(h) *f ist integrierbar genau dann, wenn f (lokal-)meßbar ist und $\|f\| < \infty$ gilt.*

Auslassung

. . . .

Eine Reihe weiterer einfacher und interessanter Eigenschaften in diesem Zusammenhang haben wir in den Übungsaufgaben (2.6.5) bis (2.6.10) des Buches formuliert. Wir empfehlen, diese jedenfalls einmal anzusehen.

Nun zum *Beweise* von (a) bis (h):

Der Nachweis von (a) und (b) verläuft in gewohnten Bahnen. ausführen!

Zu (c): In der nicht-trivialen Richtung approximiert man einfach integrierbare Funktionen f_n durch einfache Funktionen h_n so, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - h_n\| < \infty .$$

Damit hat man nach dem Ersten Konvergenzsatz $f_n(x) - h_n(x) \longrightarrow 0$ f. ü., also auch fast überall $h_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Zu (d): Dies erhält man unmittelbar, indem man für jedes $h \in \mathfrak{E}^+$ den Konvergenzsatz von LEBESGUE auf die entsprechenden Beschneidungen anwendet.

Zu (e): Nach (b) und (d) ist zunächst jede meßbare Funktion lokal-meßbar und σ-endlich. Für die Umkehrung verwendet man die Funktionen h_n von (a) und schließt mit (c).

Zu (f): Dies folgt nun unmittelbar aus (e) mit (b) und (d).

Zu (g): Man bemerkt dazu, daß eine Approximation einer nicht-negativen integrierbaren Funktion g durch Funktionen h_n aus $\mathfrak{E}^+$ wegen

$$\|g \owedge f \; - \; h_n \owedge f\| \le \|g - h_n\|$$

zugleich entsprechende Approximationen für die Beschneidungen ergibt.

Zu (h): Es ist nur noch zu zeigen, daß die beiden Bedingungen hinreichend für die Integrierbarkeit sind. Dazu bemerkt man, daß es eine integrierbare Funktion $g \geq |f|$ gibt, und wendet den Konvergenzsatz von LEBESGUE auf die Beschneidungen einer gegen f fast überall konvergierenden Folge einfacher Funktionen mit g an. □

Den Zusammenhang der entsprechenden Begriffe für Mengen und für Funktionen zeigen die folgenden Zeilen:

Eine Menge ist lokal-meßbar genau dann, wenn ihre charakteristische Funktion lokal-meßbar ist.

Die charakteristische Funktion einer Menge ist meßbar genau dann, wenn die Menge lokal-meßbar und σ-endlich ist.

Eine Menge ist (nach Definition) *meßbar genau dann, wenn ihre charakteristische Funktion integrierbar ist.*

Nur zu der ersten Aussage ist eine einfache Überlegung erforderlich: Übungsaufgabe. ausführen!

Zum Abschluß notieren wir noch eine Aussage, die die oben (Seite 58) bemerkte σ-Additivität des äußeren Maßes auf $\mathbb{L}$ verallgemeinert:

ausführen!

Die LEBESGUE-*Norm ist auf den nicht-negativen lokal-meßbaren Funktionen σ-additiv.*

Kapitel 2

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 8. Juni 2006, 22:41 Uhr