Kapitel 3

Produkt-Integration

Wir möchten einleitend den Leser an das schon zu Beginn des Kapitels 2 genannte Ziel erinnern, entsprechende Integralbegriffe wie im Kapitel 1 auch im Mehrdimensionalen, also für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, zu gewinnen. Dem dienten schon die etwas verallgemeinernden Überlegungen des Kapitels 2, die sich auf Funktionen auf einer beliebigen Grundmenge und Inhalte (oder Maße) auf einem Prä-Ring innerhalb dieser Menge bezogen. Im folgenden soll in einer ähnlich leicht abstrahierenden Form nun der Schritt vom Ein- ins Mehrdimensionale betrachtet werden: Wir verallgemeinern dabei die Bildung von Rechtecken als ‚Produkte' von Intervallen und von Rechtecksinhalten als Produkte der Kantenlängen. Diese Abstraktion zieht zugleich eine wesentliche Vereinfachung nach sich: Die entsprechende Bildung in höheren Dimensionen kann dann einfach induktiv erhalten werden.

. . . . Auslassung

3.1 Ergänzende Bemerkungen zu Integralnormen

Seien nun $\{0\} \neq \mathfrak{B}$ ein $\mathbb{K}$-Banach-Raum, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und — wie wir dies schon durchweg im Kapitel 2 betrachtet haben — $\| \ \|$ eine beliebige Integralnorm (Eigenschaften (0), (1), (2) und (3)) auf dem Raum $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{B}$-wertigen Funktionen auf einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$. Wir wollen dann — das wird jetzt von Bedeutung sein — der Beobachtung Rechnung tragen, daß aufgrund von (2) die Integralnorm offenbar nur vom Betrag der Funktion abhängt. Wir können dies beschreiben, indem wir die Menge $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})$ der nicht-negativen (endlich-wertigen) Funktionen auf $\mathfrak{R}$ und mit einem $b \in \mathfrak{B}$ vom Betrage 1 Änderung

Änderung

$$\|\varphi\|' := \|\varphi b\| \qquad \big(\varphi \in \mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})\big)$$

betrachten. Man hat dann:

(0') $$\| \ \|' : \mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}) \longrightarrow [0, \infty],$$

(1') $$\|0\|' = 0,$$

(2') $$\psi \leq \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n \implies \|\psi\|' \leq \|\psi_1\|' + \|\psi_2\|' + \cdots + \|\psi_n\|',$$

(3') $$\|\beta\,\psi\|' = \beta\,\|\psi\|' \qquad (\beta > 0).$$

Die Integralnorm $\|\;\|$ entsteht aus einer solchen *„Integralnorm"* auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})$ mittels $\|f\| := \|\,|f|\,\|'$ für $f \in \mathfrak{F}$ oder kurz (zusammengesetzte Abbildung)

$$\|\;\| := \|\;\|' \circ |\;\;| \,.$$

Im folgenden erweist es sich mehrfach als zweckmäßig, ja fast als notwendig, nicht nur endlich-wertige nicht-negative Funktionen zu betrachten, sondern den Funktionswert ∞ $(= +\infty)$ zuzulassen. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Funktionen auf $\mathfrak{R}$ mit Werten in $[0, \infty]$ dann als $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$.

Sei nun eine Integralnorm $\|\;\|'$ auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})$ gegeben. Man möchte diese dann in möglichst einfacher, ja ‚kanonischer' Weise auf den größeren Bereich $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ fortsetzen, das heißt insbesondere, ohne auf eine frühere spezielle Konstruktion noch einmal zurückzugreifen. Indem wir die Fortsetzung der Einfachheit halber wieder mit $\|\;\|'$ bezeichnen, gelingt eine *kanonische Fortsetzung* einfach mit der Definition

$$\|\psi\|' := \sup\left\{\|\varphi\|' : \varphi \in \mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}),\ \varphi \le \psi\right\} \qquad \big(\psi \in \mathfrak{P}(\mathfrak{R})\big)\,.$$

Kapitel 3

ausführlich

Offenbar ist diese Fortsetzung die *kleinstmögliche* zu einer Integralnorm. Dabei bedarf nur die Eigenschaft (2') einer Überlegung: Seien dazu ψ und ψ_ν jetzt aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ mit $\psi \le \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n$. Man betrachtet dann $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}) \ni \varphi \le \psi$ und bildet $\varphi_\nu := \varphi \wedge \psi_\nu$. Man hat offenbar $\varphi \le \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$. Mit (2') für $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})$ und der Definition der kanonischen Fortsetzung folgt $\|\varphi\|' \le \|\psi_1\|' + \|\psi_2\|' + \cdots + \|\psi_n\|'$ und daher wieder mit der Definition die Behauptung. □

Dieselbe Schlußweise zeigt auch:

Ist $\|\;\|'$ eine starke *Integralnorm auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R})$, gilt also*

(2'+) $$\psi \le \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \implies \|\psi\|' \le \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\|',$$

so ist auch die kanonische Fortsetzung auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ starke *Integralnorm.*

Auslassung

....

3.2 Produkt-Inhalte und elementare Integrale

Wir kommen nun zur Betrachtung von Produkt-Räumen, Produkt-Inhalten und zugehörigen elementaren Integralen.

Wir betrachten — neben dem $\mathbb{K}$–Banach-Raum $\mathfrak{B}$ — für $\nu = 1, 2$ nichtleere Mengen $\mathfrak{R}_\nu$, dazu Prä-Ringe $\mathbb{S}_\nu$ von Teilmengen von $\mathfrak{R}_\nu$ und klassische

Inhalte μ_ν auf $\mathbb{S}_\nu$ (bzw. schon auf $R(\mathbb{S}_\nu)$). Jeweils bilden wir das zugehörige elementare Integral $i_\nu := i_{\nu,\mathfrak{B}}$ auf dem Raum der entsprechenden einfachen Funktionen, der einen Unterraum $\mathfrak{E}_\nu$ des Raumes $\mathfrak{F}_\nu$ aller $\mathfrak{B}$-wertigen Funktionen auf $\mathfrak{R}_\nu$ bildet.

Sei nun $\mathfrak{R}_3 := \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ die Produkt- oder Paar-Menge. Dann wird man naturgemäß das Mengensystem

$$\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}_1 \underline{\times} \mathbb{S}_2 := \{A \times B \,:\, A \in \mathbb{S}_1,\ B \in \mathbb{S}_2\}$$

betrachten. — Dies verallgemeinert offenbar die Bildung von Rechtecken im $\mathbb{R}^2$ aus Intervallen in $\mathbb{R}$ (und weiter zu mehrdimensionalen Quadern).

Man erkennt:

$\mathbb{S}_3$ *ist wieder Prä-Ring* (von Teilmengen von $\mathfrak{R}_3$).

Dazu benutzt man etwa die rasch zu bestätigende Darstellung

$$(A \times B) \setminus (C \times D) \;=\; (A \times (B \setminus D)) \uplus ((A \setminus C) \times (B \cap D)),$$

aus der man mit den Prä-Ring-Eigenschaften von $\mathbb{S}_1$ und $\mathbb{S}_2$ die Behauptung ablesen kann. — Wir verwenden die Bezeichnung *„Produkt-Prä-Ring"*.

Kapitel 3

Der Leser sollte bemerken, daß diese einfache Eigenschaft für *Prä-Ringe* gilt, *nicht* jedoch für die entsprechende Produkt-Bildung *bei* zwei *Ringen:* Hier muß nicht wieder ein Ring entstehen.

Es liegt nun nahe, wenn man an das Produkt der Seitenlängen bei Rechtecken denkt, $\mu_3(A \times B) := \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$ zu definieren und die Inhaltseigenschaft nachzurechnen. Man kann sich das jedoch ersparen. Man erhält dies als Nebenresultat bei einfachen Überlegungen, die ohnehin gebraucht werden.

Betrachtet man eine Funktion f aus $\mathfrak{F}_3$, dem Raum aller $\mathfrak{B}$-wertigen Funktionen auf $\mathfrak{R}_3$, so ist für jedes x aus $\mathfrak{R}_1$ die Funktion

$$f(x,\cdot) \,:\, \mathfrak{R}_2 \longrightarrow \mathfrak{B},$$

definiert durch die Zuordnung

$$\mathfrak{R}_2 \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathfrak{B},$$

eine Funktion aus $\mathfrak{F}_2$. Wir bilden nun den Unterraum $\mathfrak{E}_3 := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}_3, \mathbb{S}_3, \mathfrak{B})$ innerhalb von $\mathfrak{F}_3$ und erkennen:

Für h aus $\mathfrak{E}_3$ und x aus $\mathfrak{R}_1$ gehört stets $h(x,\cdot)$ zu $\mathfrak{E}_2$.

Beweis: Dies bestätigt man unmittelbar für eine *„einfachste Funktion"*

$$h := \chi_{A\times B}\, b \qquad \Big(A \in \mathbb{S}_1\,,\ B \in \mathbb{S}_2\,,\ b \in \mathfrak{B}\Big)\,;$$

denn dafür ist $h(x,\cdot) = \chi_B\Big(\chi_A(x)b\Big)$. Man erhält daraus die Aussage allgemein mit der Bemerkung, daß die Zuordnungen $f \longmapsto f(x,\cdot)$ lineare Abbildungen sind. □

Nun kann man für h aus $\mathfrak{E}_3$ und jedes x aus $\mathfrak{R}_1$. das elementare Integral $i_2(h(x,\cdot))$ bilden und damit die Funktion $j_2(h)$ aus $\mathfrak{F}_1$ durch

$$j_2(h)(x) := i_2(h(x,\cdot))$$

erklären. Man erkennt:

Für h aus $\mathfrak{E}_3$ gehört stets $j_2(h)$ zu $\mathfrak{E}_1$.

Für diesen Nachweis verwendet man wieder die Bemerkung, daß die Zuordnung j_2 eine lineare Abbildung darstellt, und erhält damit eine Reduktion auf den Fall einfachster Funktionen: Für $h := \chi_{A\times B}\, b \;\; (\cdots)$ rechnet man

$$(*) \quad i_2(h(x,\cdot)) = \mu_2(B)\Big(\chi_A(x)b\Big) = \chi_A(x)\,\mu_2(B)b, \qquad j_2(h) = \chi_A\,\mu_2(B)\,b\,.$$

Damit jetzt kann man

$$i_3 := i_1 \circ j_2$$

bilden. Das heißt also: Man erzeugt für h aus $\mathfrak{E}_3$ zuerst $j_2(h)$ aus $\mathfrak{E}_1$ und hierzu $i_1(j_2(h))$ in $\mathfrak{B}$. Mit $(*)$ erkennt man:

i_3 ist eine lineare Abbildung von $\mathfrak{E}_3$ in $\mathfrak{B}$ mit

$$i_3(\chi_{A\times B}\, b) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)\,b \qquad (A \in \mathbb{S}_1,\, B \in \mathbb{S}_2\,, b \in \mathfrak{B})\,.$$

Also liefert

$$\mu_3(A\times B) := \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)$$

einen Inhalt auf $\mathbb{S}_3$.

Diese Kette einfacher Überlegungen hat nun nicht nur die Inhaltseigenschaft der Produktbildung ergeben, sondern gleichzeitig die Darstellung des zugehörigen elementaren Integrals mit Hilfe der Hintereinanderausführung elementarer Integrale. Wir bezeichnen μ_3 als den von μ_1 und μ_2 erzeugten *„Produkt-Inhalt“* und i_3 als zugehöriges *„elementares Produkt-Integral“* (zu i_1 und i_2).

Bemerken sollten wir noch, daß man die Reihenfolge der Integrationen natürlich vertauschen kann.

Abschließend notieren wir nun als wichtiges Resultat:

Sind μ_1 und μ_2 (klassische) Maße, so ist auch μ_3 (klassisches) Maß.

Zum *Beweis* zeigt man einfach, daß — mit $\mathfrak{B} := \mathbb{R}$ — die in Abschnitt 2.4 über das verallgemeinerte LEBESGUE-Integral formulierte Eigenschaft (D)

für i_3 gilt, und stützt sich auf die dort bewiesene Äquivalenz: Seien also h_n aus $\mathfrak{E}_3^+$ mit $h_n \downarrow 0$. Für jedes $x \in \mathfrak{R}_1$ hat man dann $h_n(x,\cdot) \downarrow 0$ in $\mathfrak{E}_2^+$. Mit der Eigenschaft (D) für i_2 folgt also $j_2(h_n) \downarrow 0$, dies jetzt in $\mathfrak{E}_1^+$. Man wendet wieder (D), jetzt für i_1, an. Man erhält dann, wie gewünscht, $i_3(h_n) = i_1(j_2(h_n)) \downarrow 0$. □

3.3 Iterierte Integralnormen

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist nun, bei der eben geschilderten Produktbildung von klassischen Inhalten entsprechende Integralfortsetzungen der elementaren Integrale i_1, i_2 und i_3 mit geeigneten Integralnormen zu betrachten und vor allem zu überlegen, wann sich die Darstellung von i_3 durch Produkt-Integration $i_1 \circ j_2$ in bestimmter Weise auf die Integralfortsetzungen überträgt. Es erscheint plausibel, daß es hierzu auf eine gewisse Relation zwischen den verwendeten Integralnormen ankommen wird. Für die Formulierung einer derartigen Relation wird man fast zwangsläufig zum Begriff der *„iterierten Integralnorm“* geführt:

Es seien, wie eben, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ nicht-leere Mengen, $\mathfrak{R}_3 := \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ und für $\nu = 1, 2$ nunmehr $\|\;\|_\nu'$ Integralnormen auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_\nu)$ im Sinne des obigen Abschnitts 3.1. Wie dort ausgeführt, seien diese kanonisch (minimal) auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}_\nu)$ fortgesetzt. Dann kann man ähnlich vorgehen wie bei den elementaren Integralen. Man betrachtet eine Funktion ψ aus $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$. Dann liegt für jedes x aus $\mathfrak{R}_1$ die Funktion $\psi(x,\cdot)$ in $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_2)$. Man wendet $\|\;\|_2'$ an und erklärt so

$$\big|\psi\big|_2'(x) := \|\psi(x,\cdot)\|_2'\,.$$

Offenbar ist $\big|\psi\big|_2'$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}_1)$. Sie ist im allgemeinen auch bei endlicher Funktion ψ *nicht* mehr endlich-wertig. Man kann jetzt — hier benötigt man die kanonische Fortsetzung — $\|\;\|_1'$ anwenden. So erklärt man

$$\|\;\|_{1,2}' := \|\;\|_1' \circ \big|\;\big|_2'.$$

Wie man sofort sieht, entsteht eine Integralnorm auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$. Wir nennen dies die aus $\|\;\|_2'$ und $\|\;\|_1'$ — die Reihenfolge ist wesentlich! — gebildete *„iterierte Integralnorm“*.

Hierzu überlegen wir ergänzend:

Sind $\|\;\|_2'$ und $\|\;\|_1'$ starke *Integralnormen, so ist auch die aus ihnen gebildete iterierte Integralnorm $\|\;\|_{1,2}'$* stark.

Dies erkennt man durch zweimalige Anwendung der σ-Subadditivität, zuerst für $\|\;\|_2'$, dann für $\|\;\|_1'$. ausführen!

3.4 Der Hauptsatz zur iterierten Integration

Für den entscheidenden Schritt unserer Überlegungen zur Produkt-Integration kombinieren wir nun die Bildung iterierter Integralnormen mit den Betrachtungen über Produkt-Inhalte und elementare Produkt-Integrale. Wir legen so für den gesamten Abschnitt die folgenden *Annahmen* zugrunde:

[1] Für $\nu = 1, 2$ seien $\mathbb{S}_\nu$ Prä-Ringe auf den nicht-leeren Mengen $\mathfrak{R}_\nu$, μ_ν klassische Inhalte auf $\mathbb{S}_\nu$ und dazu i_ν die elementaren Integrale auf den zugehörigen Räumen einfacher Funktionen $\mathfrak{E}_\nu = \mathfrak{E}(\mathfrak{R}_\nu, \mathbb{S}_\nu, \mathfrak{B})$ mit einem $\mathbb{K}$-Banach-Raum $\{0\} \neq \mathfrak{B}$. Auf $\mathfrak{R}_3 := \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ sei $\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}_1 \underline{\times} \mathbb{S}_2$ der Produkt-Prä-Ring und $i_3 := i_1 \circ j_2$ das zugehörige elementare Integral auf $\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{E}(\mathfrak{R}_3, \mathbb{S}_3, \mathfrak{B})$.

[2] Für $\nu = 1, 2$ seien $\|\ \|'_\nu$ Integralnormen auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_\nu)$ und für i_ν geeignet:

$$\bigl|i_\nu(h)\bigr| \leq \|h\|_\nu \qquad (h \in \mathfrak{E}_\nu)\,.$$

[3] Auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$ sei $\|\ \|'_3$ eine Integralnorm. Für sie gelte

$$\|\ \|'_3 \geq \|\ \|'_{1,2}\,.$$

Dabei verwenden wir in [2] und entsprechend an späteren Stellen die Verabredung

$$\|\ \|_\nu := \|\ \|'_\nu \circ \bigl|\ \bigr|\,.$$

In [3], das sich als die entscheidende Voraussetzung erweist, tritt die oben diskutierte iterierte Integralnorm auf. Wir erinnern daran, daß für deren Bildung die kanonische Fortsetzung von $\|\ \|'_1$ auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}_1)$ verwendet wird. Diese Fortsetzung (mit der gleichen Bezeichnung) wird auch im folgenden mehrfach auftreten, nämlich dort, wo entsprechende Funktionen mit möglichen Werten ∞ betroffen sind.

Wir zeigen nun zunächst:

$\|\ \|'_{1,2}$ und damit auch $\|\ \|'_3$ ist für i_3 geeignet.

Dazu genügt es, für $h \in \mathfrak{E}_3^+$ zu rechnen:

$$i_3(h) = i_1(j_2(h)) \leq \|j_2(h)\|'_1 \leq \bigl\|\,|h|'_2\,\bigr\|'_1 = \|h\|'_{1,2} \leq \|h\|'_3\,,$$

genauer: $i_{\kappa,\mathbb{R}}$ bzw. $j_{2,\mathbb{R}}$

wobei man

$$j_2(h)(x) = i_2(h(x,\cdot)) \leq \|h(x,\cdot)\|'_2 = |h|'_2(x)$$

beachtet. □

Es seien im folgenden für $\nu = 1, 2, 3$ die aus $\mathfrak{E}_\nu$ mit $\|\ \|_\nu$ entstehenden Räume integrierbarer Funktionen mit $\mathfrak{I}_\nu = \mathfrak{I}_\nu(\mathfrak{B})$ und die Integralfortsetzungen wieder mit $i_\nu = i_{\nu,\mathfrak{B}}$ bezeichnet.

Man wird nun anstreben, die Relation $i_3 = i_1 \circ j_2$ für die elementaren Integrale auf die Fortsetzungen zu übertragen. Es zeigt sich jedoch, daß im allgemeinen für $f \in \mathfrak{I}_3$ nicht mit jedem x aus $\mathfrak{R}_1$ auch $f(x,\cdot)$ zu $\mathfrak{I}_2$ gehört. Hier ist also eine gewisse Einschränkung notwendig. Eine geeignet modifizierte Aussage in dieser Richtung gibt der folgende

Hauptsatz:

Es sei f aus $\mathfrak{I}_3$.

Wir bezeichnen für x aus $\mathfrak{R}_1$: $\quad \varphi(x) := \inf\bigl\{\|f(x,\cdot) - h\|_2 : h \in \mathfrak{E}_2\bigr\}$.

Es gilt dann:

(a) Es ist $\|\varphi\|'_1 = 0$; damit gehört $f(x,\cdot)$ zu $\mathfrak{I}_2$ für alle x aus $\mathfrak{R}_1$ mit Ausnahme einer $\bigl(\|\ \|'_1\text{-}\bigr)$ Null-$*$-Menge.

Änderung

(b) Es gibt für jedes $x \in \operatorname{Tr}\varphi$ eine Funktion h_x in $\mathfrak{E}_2$ mit

$$\|f(x,\cdot) - h_x\|_2 \leq 2\varphi(x)\,.$$

(c) Setzt man hiermit

$$g(x) := \begin{cases} i_2(f(x,\cdot)) & (f(x,\cdot) \in \mathfrak{I}_2), \\ i_2(h_x) & (f(x,\cdot) \notin \mathfrak{I}_2), \end{cases}$$

so gilt

$$g \in \mathfrak{I}_1, \qquad i_1(g) = i_3(f).$$

Zur Erläuterung sei gesagt: Die Funktion φ liefert für jedes x den ‚Abstand' $\bigl($bezüglich $\|\ \|_2\bigr)$ der Funktion $f(x,\cdot)$ vom Unterraum der einfachen Funktionen $\mathfrak{E}_2$.

Zum *Beweise* geht man naturgemäß aus von einer Folge von Funktionen $h_n \in \mathfrak{E}_3$ mit

$$\|h_n - f\|_3 \longrightarrow 0\,.$$

Für alle x aus $\mathfrak{R}_1$ gilt $f_n(x,\cdot) \in \mathfrak{E}_2$, also nach Definition

$$\varphi(x) \leq \|h_n(x,\cdot) - f(x,\cdot)\|_2 = \bigl|h_n - f\bigr|_2(x)\,,$$

wobei wir die naheliegende Bezeichnungsweise

$$\bigl|\ \bigr|_2 := \bigl|\ \bigr|'_2 \circ \bigl|\ \bigr|$$

benutzt haben. Die Anwendung von $\|\ \|'_1$ gibt

$$\|\varphi\|'_1 \leq \bigl\|\,|h_n - f|_2\,\bigr\|'_1 = \|h_n - f\|_{1,2} \leq \|h_n - f\|_3 \longrightarrow 0\,.$$

So ist (a) bewiesen mit der Erinnerung daran, daß die Mengen $\{x : \varphi(x) \geq 1/n\}$ Nullmengen sind — natürlich auch, wenn Werte ∞ zugelassen sind. — Für (b) genügt der Hinweis auf die Definition von φ. — Zur Bestätigung von (c) setzen wir

$$g_n := j_2(h_n) \in \mathfrak{E}_1$$

und schätzen ab. Für den Fall, daß $f(x,\cdot)$ integrierbar ist ($\varphi(x) = 0$), hat man

$$\big|g_n - g\big|(x) \;=\; \big|i_2(h_n(x,\cdot) - f(x,\cdot))\big| \leq \|h_n(x,\cdot) - f(x,\cdot)\|_2\,.$$

Für die übrigen x erhält man analog

$$\big|g_n - g\big|(x) \;\leq\; \|h_n(x,\cdot) - h_x\|_2 \;\leq\; \|h_n(x,\cdot) - f(x,\cdot)\|_2 + \|f(x,\cdot) - h_x\|_2\,.$$

Das ergibt zusammen nach (b)

$$\big|g_n - g\big| \leq \big|h_n - f\big|_2 + 2\varphi\,.$$

Jetzt liefert die Anwendung von $\|\ \|_1'$ mit [3] und der Eigenschaft von φ

$$\|g_n - g\|_1 \;\leq\; \|h_n - f\|_3 \longrightarrow 0$$

und damit $g \in \mathfrak{I}_1$ sowie $i_3(h_n) = i_1(g_n) \longrightarrow i_1(g)$. Wegen $i_3(h_n) \longrightarrow i_3(f)$ ist dann alles gezeigt. □

Kapitel 3

Die Aussage des Hauptsatzes vereinfacht sich wesentlich, wenn die Integralnorm $\|\ \|_1'$ stark ist. Man erhält so den

„Satz von Fubini“:

Ist — zusätzlich zu den Annahmen [1], [2], [3] — $\|\ \|_1'$ eine starke Integralnorm, so gilt, falls $f \in \mathfrak{I}_3$: Für fast alle x aus $\mathfrak{R}_1$ (bezüglich $\|\ \|_1'$) gehört $f(x,\cdot)$ zu $\mathfrak{I}_2$. Erklärt man im Falle der Integrierbarkeit

$$g(x) \;:=\; i_2(f(x,\cdot))$$

und wählt die Werte von g auf der verbleibenden Nullmenge beliebig (in $\mathfrak{B}$), so hat man

$$g \in \mathfrak{I}_1 \quad \textit{mit} \quad i_3(f) \;=\; i_1(g)\,.$$

Zum *Beweis* wird sich der Leser erinnern, daß bei starker Integralnorm Null-$*$-Mengen Nullmengen sind und Funktionen auf Nullmengen beliebig abgeändert werden können, ohne Integrierbarkeit und Integralwert zu ändern. □

Wir haben diese leichte Folgerung aus dem Hauptsatz „Satz von Fubini“ genannt, um eine suggestive Bezeichnung zu haben, obwohl dieser Satz eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes von Fubini der klassischen Lebesgueschen Integrationstheorie darstellt.

Deutlich sei noch gesagt, daß *im allgemeinen* Falle des Hauptsatzes *keine beliebige Abänderung* auf der Ausnahmemenge zulässig ist. Wir verweisen dazu auf die Übungsaufgaben (3.4.1) und (3.4.2) des Buches.

Auslassung ....

Spezialfälle

Im folgenden untersuchen wir im Hinblick auf die Anwendung der erhaltenen recht allgemeinen Sätze zur Produkt-Integration zunächst zwei spezielle Situationen. Stets gehen wir dabei von den Grundannahmen [1] aus. Die von uns untersuchten Integralnormen in den drei Räumen werden immer entweder die (verallgemeinerte) Riemann-Darboux-Norm oder die Lebesgue-Norm sein. Im letzten Falle wird stets angenommen (oder sichergestellt sein), daß der zugehörige Inhalt sogar Maß ist. Daher ist immer [2] gegeben. So werden wir jeweils nur zu untersuchen haben, ob [3] erfüllt ist. Änderung

I. $\nu = 1, 2, 3$: **Riemann-Darboux-Norm:**

Wir notieren:

Hier ist [3] erfüllt. Es gilt daher der Hauptsatz.

Beweis: Hier rechnet man — entsprechend zu S. 70, unten — für $h \in \mathfrak{E}_3^+$:

$$i_3(h) \;=\; i_1(j_2(h)) \;=\; \|j_2(h)\|_1' \;=\; \big\|\,|h|_2'\,\big\|_1' \;=\; \|h\|_{1,2}'\,,$$

wobei man für $x \in \mathfrak{R}_1$

genauer: $i_{\kappa,\mathbb{R}}$ bzw. $j_{2,\mathbb{R}}$

$$j_2(h)(x) = i_2(h(x,\cdot)) \;=\; \|h(x,\cdot)\|_2' = \big|h\big|_2'(x)$$

Kapitel 3

beachtet. Die Aussage [3] folgt nun aus der oben festgehaltenen Tatsache, daß $\|\ \|_3'$ die größte Integralnorm auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$ ist, die auf $\mathfrak{E}_3^+$ mit i_3 übereinstimmt (vgl. Seiten 31 und 45). □

Wir bemerken dazu:

In der Ungleichung von [3] steht natürlich ‚=‘ für ψ in $\mathfrak{E}_3^+$, jedoch kann für gewisse ψ aus $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$ durchaus auch ‚>‘ stehen. Darüber hinaus kann bei Vertauschung der Reihenfolge für die Bildung der iterierten Integralnorm

$$\|\psi\|_{2,1}' \;\neq\; \|\psi\|_{1,2}'$$

auftreten. Hierzu verweisen wir auf die Übungsaufgabe (3.5.1) des Buches.

Auf diesen Überlegungen basiert speziell der Zugang zum Riemann-Integral und Jordan-Inhalt im $\mathbb{R}^k$ (Kapitel 4 des Buches), auf den ich jedoch in dieser Vorlesung nicht eingehe.

II. $\nu = 1, 2, 3$: **Lebesgue-Norm:**

Wir erhalten wieder:

Es ist [3] erfüllt. Es gilt daher der Hauptsatz in der speziellen Fassung des „Satzes von Fubini“.

Dies gewinnt man sofort aus der Bemerkung, daß $\|\ \|_3'$ jetzt die größte *starke* Integralnorm auf $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$ ist, die auf $\mathfrak{E}_3^+$ mit i_3 übereinstimmt (vgl. S. 52). zusätzlich ‚direkt‘

Auch hier halten wir fest:

In der Ungleichung von [3] *steht natürlich ‚=' für ψ in $\mathfrak{E}_3^+$, jedoch kann für gewisse ψ aus $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{R}_3)$ durchaus auch ‚>' stehen. Darüber hinaus kann bei Vertauschung der Reihenfolge für die Bildung der iterierten Integralnorm*

$$\|\psi\|'_{2,1} \neq \|\psi\|'_{1,2}$$

auftreten. Hierzu verweisen wir auf Übungsaufgabe (3.5.2) des Buches.

Bemerkenswert ist, daß für den Fall, daß die Funktion f auf $\mathfrak{R}_3$ nicht nur Lebesgue-, sondern sogar Riemann-integrierbar ist, der Hauptsatz für die Situation I. noch schärfere Aussagen liefert als die Anwendung der Ergebnisse von II. Einmal erkennt man damit sogar die Riemann-Integrierbarkeit gewisser ‚Schnittfunktionen', zum anderen ist die Aussage über die Ausnahmemenge im allgemeinen schärfer. Man vergleiche dazu Übungsaufgabe (1.7.12) des Buches.

Auslassung ....

Als Folgerung aus dem Satz von Fubini und den Übungen (2.1.4), (2.2.1) und (2.4.5) des Buches erhält man:

Kapitel 3

Großer Umordnungssatz

Vor.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\{0\} \neq \mathfrak{B}$ $\mathbb{K}$-Banach-*Raum,*

$f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *mit* $\sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |f(n,m)| < \infty$

Beh.: *1) Für* $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum\limits_{m=1}^{\infty} f(n,m) \begin{cases} \text{(absolut) konvergent} \\ =: g(n) \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n) \begin{cases} \text{(absolut) konvergent} \\ =: a \end{cases}$

3) Für eine bijektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ist*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f\circ\tau)(j) \begin{cases} \text{(absolut) konvergent} \\ = a \end{cases}.$$