Kapitel 7

Verallgemeinerte Integralnormen

Im folgenden betrachten wir *„verallgemeinerte Integralnormen“*. Die Verallgemeinerung bezieht sich dabei auf drei Aspekte:

1. Wir nehmen sie als definiert auf *Teilmengen der Funktionen mit Werten in* $[0, \infty]$ auf einer Menge $\mathfrak{R}$ an. Diese verallgemeinerten Integralnormen brauchen auch auf dem ‚Ausgangsbereich‘ nicht endlich-wertig zu sein. Änderung

2. Wir *verzichten auf* die bei vielen Überlegungen bisher wesentlich benutzte *Additivität*. Beim Vorliegen einer schwächeren Eigenschaft, der *„Halbadditivität“*, ist dennoch die Gewinnung starker Konvergenzsätze möglich. Dies tritt schon bei den p-Normen des Kapitels 6 auf. Auch innerhalb der Funktionalanalysis führen die ‚*orthogonalen Maße*‘ der Spektraltheorie auf derartige Integralnormen. Änderung

3. Als vielleicht zunächst ungewohnt erscheint schließlich der *Verzicht auf* die Forderung der *Homogenität*. Doch ist auch diese Erweiterung ganz wesentlich: Einmal tritt eine derartige verallgemeinerte Integralnorm fast zwangsläufig auf, wenn man in eleganter Weise im Rahmen der Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik die ‚*Konvergenz dem Maße nach*‘ *(‚stochastische Konvergenz‘)* mit Hilfe einer *„Maßnorm“* untersucht. Zum anderen ist natürlich die *Erkenntnis* von Gewicht, daß fast alle Überlegungen der Integrationstheorie die Forderung der Homogenität gar nicht benötigen. Man erkennt, daß man eigentlich alles anstatt mit linearen Räumen für (pseudonormierte) Gruppen durchführen kann.

Kapitel 7

7.1 Vorbereitungen

Schon in den bisherigen Überlegungen — Pseudonormen, Integralnormen und Pseudometriken haben Werte in $[0, \infty]$ — kamen oft Rechnungen in $[0, \infty]$ vor. Im folgenden — insbesondere bei der Betrachtung von Integralnormen auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ — wird dies verstärkt auftreten. Änderung

Daher stellen wir einige einfache Überlegungen vorweg zusammen:

Innerhalb $[0, \infty]$ sind die Operationen $+, \wedge, \vee$ und natürlich die Relationen $\leq, \geq, \ldots$ als wohldefiniert bekannt. Als Ersatz für die Subtraktion wird man in Analogie zur symmetrischen Differenz bei Mengen die Operation $\varDelta$ betrachten, die für zwei endliche Werte den Betrag der Differenz liefert, bei nur einem endlichen Wert natürlich ∞, während schließlich $\infty \varDelta \infty := 0$ erklärt wird. Damit ist allgemein $a \varDelta b$ die kleinste Lösung der Gleichung

$$(a \wedge b) + x = a \vee b.$$

Gelegentlich kann man noch zweckmäßig die entsprechende maximale Lösung dieser Gleichung verwenden: $a \nabla b$. Sie weicht offenbar nur durch $\infty \nabla \infty := \infty$ von $\varDelta$ ab.

ausführen!

Wir bestätigen dazu:

(i) $\varphi \varDelta \varphi = 0$

(ii) $\varphi \varDelta \psi = \psi \varDelta \varphi$

(iii) $\psi \leq (\psi \varDelta \varphi) + \varphi$

(iv) $\varphi \leq \psi + \chi \wedge \psi \leq \varphi + \chi \iff \psi \varDelta \varphi \leq \chi$

(v) $\varphi \varDelta \psi \leq (\varphi \varDelta \chi) + (\chi \varDelta \psi)$

(vi) $\varphi' \leq \varphi \leq \psi \leq \psi' \implies \psi \varDelta \varphi \leq \psi' \varDelta \varphi'$

(vii) $\varphi \vee \psi = \psi + (\varphi \varDelta (\varphi \wedge \psi))$

(viii) $\varphi \nabla \varphi = \varphi \varDelta ((\varphi + \varphi) \varDelta \varphi)$

(ix) $\varphi \nabla \psi = (\varphi \varDelta \psi) + (\varphi \nabla \varphi).$

Kapitel 7

Die eben betrachteten Operationen und Relationen übertragen wir auf die $[0, \infty]$-wertigen Funktionen auf einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$, deren Gesamtheit wir — wie oben — wieder mit $\mathfrak{P}$, genauer $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$, bezeichnen, einfach durch punktweise Definition. Damit gelten die eben notierten Eigenschaften auch für Funktionen aus $\mathfrak{P}$. Bemerkenswert ist, daß die Formeln (vii) – (ix) zeigen: *Die Operationen* $\vee$ *und* ∇ *lassen sich durch* $+, \wedge$ *und* $\varDelta$ *ausdrücken.*

Wesentlich ist noch die Abschätzung

(x) $$(\varphi * \psi) \varDelta (\varphi' * \psi') \leq (\varphi \varDelta \varphi') + (\psi \varDelta \psi'),$$

bei der für $*$ jede der fünf Operationen $+, \wedge, \vee, \varDelta$ und ∇ eingesetzt werden kann. Der Leser wird gewiß schon den Blick dafür haben, daß dies die Grundlage für spätere Stetigkeitsaussagen darstellt. Wir dürfen (x) als einfache Übungsaufgabe belassen.

Auslassung

. . . .

7.2 Pseudometriken

Schon oben — insbesondere bei der Betrachtung äußerer Inhalte — haben wir Pseudometriken (leicht verallgemeinerte Metriken) als zweckmäßig erkannt. Dies wird zu einem wesentlichen Hilfsmittel im Zusammenhang mit den zu betrachtenden verallgemeinerten Integralnormen. Wir erinnern daran, daß wir ϱ als Pseudometrik für eine nicht-leere Menge M bezeichnen, wenn

$$\begin{aligned}
&\varrho : M \times M \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{mit}\\
&\varrho(a, a) = 0,\\
&\varrho(a, b) = \varrho(b, a) \quad \text{(Symmetrie)}\\
&\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c) \quad \text{(Dreiecksungleichung).}
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu einer Metrik wird also darauf verzichtet, daß ϱ endlichwertig und definit ist.

Durch $\varrho(a_n, a) \longrightarrow 0$ wird man Konvergenz (bezüglich ϱ) definieren und dabei die üblichen Sprech- und Notierungsweisen verwenden; ebenso natürlich mit $\varrho(a_n, a_m) \longrightarrow 0$ die Cauchy-Konvergenz.

Wir vermerken die Abschätzung (infolge der Dreiecksungleichung)

ausführen!

$$\varrho(a, b) \varDelta \varrho(x, y) \leq \varrho(a, x) + \varrho(b, y).$$

Der mit den Grundbegriffen der elementaren Topologie vertraute Leser erkennt hier natürlich unschwer einen ‚topologischen Raum': Man verwendet wie bei einer Metrik ‚offene Kugeln' als Umgebungsbasis. Mit etwas eingehenderen topologischen Kenntnissen wird man natürlich — ebenfalls wie bei einer Metrik — einen ‚*pseudometrischen Raum*' als ‚*uniformen Raum*' ansehen: Man hat durch die Mengen

$$\mathfrak{V}(\varepsilon) := \left\{(a, b) \in M^2 : \varrho(a, b) < \varepsilon\right\}$$

Kapitel 7

eine Basis einer Uniformität. Insbesondere der Leser, dem diese Aspekte weniger bekannt sind, sei auf einige einschlägige weitere Übungsaufgaben hierzu verwiesen.

7.3 Verallgemeinerte Integralnormen und äußere Inhalte

Sei jetzt $\mathfrak{E}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{R})$, von der wir zunächst nur voraussetzen, daß sie die Funktion 0 enthält. Wir definieren als „(verallgemeinerte) *Integralnorm* auf $\mathfrak{E}'$" eine Abbildung

$$\| \;\| \colon \mathfrak{E}' \longrightarrow [0, \infty]$$

mit

$$\|0\| = 0$$

und der *‚endlichen Subadditivität‘* $\big($innerhalb $\mathfrak{E}'\big)$

$$\psi \leq \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu \implies \|\psi\| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \|\psi_\nu\|$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wie gewohnt, sprechen wir von einer „(verallgemeinerten) *starken Integralnorm* auf $\mathfrak{E}'$“, wenn statt der endlichen Subadditivität die *‚abzählbare Subadditivität‘ (σ-Subadditivität)*

$$\psi \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu \implies \|\psi\| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\psi_\nu\|$$

gilt, aus der natürlich die endliche Subadditivität folgt: Eine starke Integralnorm ist also immer eine Integralnorm. Hier wie im folgenden lassen wir die Bezeichnung ‚verallgemeinerte‘ fort; wenn zusätzliche Eigenschaften (z. B. Homogenität, Additivität) wesentlich sind, werden wir dies ausdrücklich festhalten.

Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen Integralnormen und äußeren Inhalten, bzw. starken Integralnormen und äußeren Maßen:

Sei dazu wieder $\mathfrak{E}'$ eine die Funktion 0 enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{P}$ und $\|\ \|$ eine Integralnorm auf $\mathfrak{E}'$. Dann wird man naturgemäß das System $\mathbb{H}$ aller Teilmengen von $\mathfrak{R}$ betrachten, deren charakteristische Funktionen in $\mathfrak{E}'$ liegen. $\mathbb{H}$ enthält damit die leere Menge. Dann ist durch

$$\lambda(M) := \|\chi_M\|$$

ein *„äußerer Inhalt* auf $\mathbb{H}$“ gegeben; es gilt:

$$\lambda : \mathbb{H} \longrightarrow [0, \infty] \qquad \text{mit}$$

$$\lambda(\emptyset) \;=\; 0 \qquad \text{und}$$

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu \implies \lambda(A) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda(A_\nu)\,.$$

Ist dabei $\|\ \|$ eine *starke* Integralnorm, so hat man ein *„äußeres Maß* auf $\mathbb{H}$“; d. h. statt der zuletzt notierten endlichen Subadditivität gilt die entsprechende σ-Subadditivität

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \implies \lambda(A) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda(A_\nu)\,.$$

Bemerkenswert ist, daß jeder äußere Inhalt bzw. jedes äußere Maß so aus einer geeignet definierten Integralnorm bzw. starken Integralnorm erhalten

werden kann. Der Leser vergleiche die Übungsaufgabe (7.3.2) des Buches, in der dieser Sachverhalt ausführlicher formuliert ist. Man erkennt übrigens, daß die angegebene einfache Lösung nur infolge des Verzichts auf die Homogenität der Integralnorm möglich ist.

Wir sollten noch die (gewohnten) Bezeichnungen vermerken: Eine Funktion φ aus $\mathfrak{E}'$ heißt „$\big(\|\ \|$-$\big)$ *Nullfunktion*“, wenn $\|\varphi\| = 0$; eine Menge A aus $\mathbb{H}$ heißt „$\big(\|\ \|$-$\big)$ *Nullmenge*“, wenn mit dem zugehörigen äußeren Inhalt $\lambda(A) = 0$ gilt, also ihre charakteristische Funktion Nullfunktion ist.

Ist $\mathfrak{E}'$ wieder eine die Funktion 0 enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{P}$, $\|\ \|$ eine Integralnorm auf $\mathfrak{E}'$, so kann man, falls $\mathfrak{E}'$ mit zwei Funktionen auch deren symmetrische Differenz $(\varDelta)$ enthält (wir kürzen derartiges ab mit

$$\mathfrak{E}' \mathbin{\underset{e}{\varDelta}} \mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}',$$

wobei das daruntergestellte ‚e‘ die elementweise Bildung deutlich machen soll), in natürlicher Weise

$$\varrho(\varphi, \psi) \;:=\; \|\varphi \mathbin{\varDelta} \psi\|$$

definieren und erkennt sofort:

ϱ ist eine Pseudometrik auf $\mathfrak{E}'$.

Im folgenden beziehen wir uns stets auf diese einer Integralnorm zugeordnete Pseudometrik, wenn von Konvergenz und entsprechenden ‚topologischen‘ Begriffen die Rede ist.

Wir vermerken an dieser Stelle: Wegen $\|\psi\| = \varrho(\psi, 0)$ folgt aus der Stetigkeit von ϱ selbst bezüglich ϱ auch die *Stetigkeit von* $\|\ \|$ bezüglich der davon erzeugten Pseudometrik; *aus* $\psi_n \longrightarrow \psi$ $\big(\|\ \|\big)$, d. h. $\psi_n \longrightarrow \psi$ (ϱ), *folgt stets* $\|\psi_n\| \mathbin{\varDelta} \|\psi\| \longrightarrow 0$ *und damit* erst recht auch $\|\psi_n\| \longrightarrow \|\psi\|$.

Der geschilderten kanonischen Erzeugung einer Pseudometrik zu einer Integralnorm entspricht im Zusammenhang mit äußeren Inhalten: Ist $\mathbb{H}$ ein die leere Menge enthaltendes System von Teilmengen der nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und λ ein äußerer Inhalt auf $\mathbb{H}$, so kann man, falls $\mathbb{H}$ die Eigenschaft $\mathbb{H} \mathbin{\underset{e}{\varDelta}} \mathbb{H} \subset \mathbb{H}$ hat,

$$\delta(A, B) := \lambda(A \mathbin{\varDelta} B)$$

definieren und erhält mit δ eine *Pseudometrik auf* $\mathbb{H}$.

Im folgenden spielen eine wesentliche Rolle nicht-leere Teilmengen $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{P}$, die abgeschlossen bezüglich der drei Operationen $+$, $\varDelta$ und $\wedge$ und damit (vgl. Seite 76) auch gegen $\vee$ und ∇ sind. Wir nennen solche Mengen (sie enthalten natürlich die Funktion 0) *„SV-Systeme“*, um an die Begriffe ‚Summe‘ und ‚Verband‘ zu erinnern.

Sei jetzt $\mathfrak{E}'$ ein SV-System. Wir beziehen uns dann auf die Ungleichung

(x) $$(\varphi * \psi)\,\Delta\,(\varphi' * \psi') \;\leq\; (\varphi\,\Delta\,\varphi') + (\psi\,\Delta\,\psi')\,,$$

in der $*$ gerade jede der eben genannten fünf Operationen bedeuten konnte. Diese Formel wird man mit der Subadditivität einer Integralnorm $\|\ \|$ auf $\mathfrak{E}'$ verbinden. So ergibt sich die Abschätzung

$$\varrho(\varphi * \psi,\, \varphi' * \psi') \;\leq\; \varrho(\varphi,\, \varphi') \;+\; \varrho(\psi,\, \psi')\,.$$

Sie läßt unmittelbar erkennen, daß alle fünf Operationen bezüglich der mit der Integralnorm verbundenen Pseudometrik gleichmäßig stetig auf $\mathfrak{E}'$ sind (vgl. Übungsaufgabe (7.2.4) des Buches). Dies führt sofort zum *Beweis* der Feststellung:

ausführen!

Die Abschließung $\mathfrak{I}' = \overline{\mathfrak{E}'}$ *eines SV-Systems* $\mathfrak{E}'$ *bezüglich einer auf ganz* $\mathfrak{P}$ *gegebenen Integralnorm* (d. h. mit der erzeugten Pseudometrik) *ist wieder ein SV-System.*

Auslassung

....

7.4 Starke Integralnormen

Im folgenden nehmen wir $\|\ \|$ als eine starke Integralnorm auf $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ mit nicht-leerer Menge $\mathfrak{R}$ an. Wir haben oben schon gesehen, daß dann der zugehörige äußere Inhalt λ ein äußeres Maß ist.

Man erkennt sofort, daß mit den zugehörigen Begriffen ‚Nullfunktion', ‚Nullmenge' und ‚fast-überall' die gewohnten einfachen Aussagen gültig bleiben. Insbesondere *ist eine Funktion* φ *Nullfunktion genau dann, wenn ihre Trägermenge Nullmenge ist, was natürlich wieder bedeutet, daß* $\varphi(x) = 0$ *fast-überall gilt.*

Kapitel 7

Der Vollständigkeit halber schreiben wir an dieser Stelle die Definition auf:

Ist A eine Aussageform auf $\mathfrak{R}$, so sagen wir *„$A(x)$ gilt ($\|\ \|$-) fast-überall (f. ü.)"*, wenn die Ausnahmemenge $\{x : A(x) \text{ ist falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

Die *Beweise* der obigen diesbezüglichen Aussagen sind unmittelbar mit den beiden Ungleichungen

$$\chi \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi\,, \qquad \varphi \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi$$

und der σ-Subadditivität von $\|\ \|$ gegeben; χ ist dabei die charakteristische Funktion der Trägermenge von φ. □

Wir erwähnen gleich an dieser Stelle zwei Überlegungen, die im Zusammenhang zwischen Konvergenz und *f. ü.-Modifikationen* immer wieder auftreten

werden, die wir jedoch nicht jedesmal ausdrücklich ausführen wollen: Nach dem eben Gesagten bedeutet $\varphi(x) = \psi(x)$ f. ü. dasselbe wie $\varrho(\varphi,\, \psi) = 0$; damit folgt:

ausführen!

(a) *Gilt* $\varphi_n \longrightarrow \varphi\,(\|\ \|)$, *so hat man* $\varphi_n \longrightarrow \psi\,(\|\ \|)$ *genau dann, wenn* $\varphi(x) = \psi(x)$ *f. ü.*

(b) *Zwei fast-überall übereinstimmende Funktionen haben stets den gleichen Wert der Integralnorm.*

Nach diesen (notwendigen) Vorbereitungen wird nun im folgenden unser Ziel sein, Vorstufen von Verallgemeinerungen der Konvergenzsätze von Levi, Lebesgue und Fatou zu gewinnen. Dies wird ohne weitere Voraussetzungen für eine schwache Form des Satzes von Levi und dessen Konsequenzen bezüglich Vollständigkeit und Charakterisierung von $\|\ \|$-Konvergenz möglich sein, während, wie wir oben schon anmerkten, für die eben genannten weitergehenden Resultate die fehlende Eigenschaft der Additivität eine zusätzliche Forderung an die Integralnorm, eben die schon erwähnte *Halbadditivität,* notwendig macht.

Der Leser wird vielleicht mit etwas Verwunderung bemerken, daß hier relativ eingehend, ohne daß eigentlich Integrale schon auftreten, doch ‚Integrationstheorie' für $[0, \infty]$-wertige Funktionen entwickelt wird. Dies hat nicht nur den rein mathematischen Vorteil, daß die einfache Beweis-Struktur der Theorie wesentlich deutlicher wird. Auch für die Praxis in Analysis und Statistik ergibt sich hier sofort die Möglichkeit, Funktionen mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{-\infty,\, \infty\}$ einzubeziehen. Derartiges wäre im Rahmen der späteren Betrachtung vektorwertiger Funktionen und Inhalte natürlich kaum darzustellen. Alles dies liegt in der Linie des dem Leser allmählich vertrauten Leitgedankens, die metrisch-topologischen Aspekte deutlicher (als sonst meist üblich) herauszuheben, um damit Durchsichtigkeit und Verallgemeinerungsfähigkeit zu erreichen.

Kapitel 7

In diesem Sinne notieren wir hier im Rahmen der Betrachtung $[0, \infty]$-wertiger Funktionen eine schwache Fassung des **Satzes von Levi**, aus dem sich, wie gesagt, Vollständigkeit und Konvergenz-Charakterisierung einfach ableiten lassen, völlig analog zu Kapitel 1.

Erster Konvergenzsatz

Es seien $\psi_n \in \mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ *mit der Eigenschaft*

$$\Big\| \sum_{n=m}^{\infty} \psi_n \Big\| \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)\,.$$

Für $\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$ *gilt dann*

$$\sum_{n=1}^{m} \psi_n \longrightarrow \psi \quad (\| \ \|)$$

sowie

$$\sum_{n=m}^{\infty} \psi_n(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{f. ü.}$$

Bemerkung: *Die genannte Voraussetzung ist erst recht dann erfüllt, wenn für ein* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|\psi_n\| < \infty .$$

Zum *Beweis** bezeichnet man etwa mit A die ‚Ausnahmemenge' der x aus $\mathfrak{R}$, für die nicht

$$\sum_{n=m}^{\infty} \psi_n(x) \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty) .$$

Dies ist offenbar die Menge der Stellen, für die alle Reihenreste ∞ sind. Dann lassen sich für jedes m sowohl

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \psi_n \right) \triangle \psi$$

als auch χ_A abschätzen durch den Reihenrest

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \psi_n .$$

Durch Anwendung der Integralnorm ergeben sich so einerseits

$$\varrho\left(\sum_{n=1}^{m} \psi_n ,\, \psi \right) \le \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \psi_n \right\| \longrightarrow 0 ,$$

andererseits

$$\| \chi_A \| \le \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \psi_n \right\| \longrightarrow 0 . \qquad \square$$

Hieraus leiten wir nun her den

Vollständigkeitssatz

$\mathfrak{P}$ *ist* ϱ*-vollständig.* — Damit sind *alle* ϱ*-abgeschlossenen Teilmengen von* $\mathfrak{P}$ *vollständig.*

* Der Beweis zeigt übrigens, daß der o. a. Konvergenzsatz in *dieser* Formulierung sogar für *beliebige* Integralnormen gilt, wenn man ‚f. ü.' wie bei starken Integralnormen definiert.

Kapitel 7

Zum *Beweis* sei (ψ_n) eine ϱ- Cauchy-Folge. Wir können dabei sogleich annehmen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho(\psi_{n+1},\, \psi_n) < \infty ;$$

denn eine Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge ist selbst konvergent (mit gleichem Grenzwert).

So folgt aus dem ‚Ersten Konvergenzsatz'

$$\sum_{n=m}^{\infty} (\psi_{n+1} \triangle \psi_n)(x) \longrightarrow 0$$

für alle x aus $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme einer Nullmenge A. Wir setzen nun**

1) $\psi(x) :=$ beliebig für $x \in A$.

Für x außerhalb A gibt es ein m mit

2) $\sum_{n=m}^{\infty} (\psi_{n+1} \triangle \psi_n)(x) < \infty$.

Wir setzen dann

2a) $\psi(x) := \infty$, falls dabei $\psi_m(x) = \infty$, und

2b) $\psi(x) := \lim \psi_n(x)$, sonst.

Dazu bemerken wir: Für alle x in A und alle m gilt

$$\sum_{n=m}^{\infty} (\psi_{n+1} \triangle \psi_n)(x) = \infty ;$$

im Falle 2a) hat man $\psi_n(x) = \infty$ für $n \ge m$; im Fall 2b) ist $\psi_n(x)$ endlich für $n \ge m$ und mit

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| \psi_{n+1}(x) - \psi_n(x) \right| < \infty$$

die Konvergenz der Folge gegen einen endlichen Limes gegeben. Damit gilt nun offenbar — punktweise zu bestätigen —

$$\psi \triangle \psi_k \le \sum_{n=k}^{\infty} (\psi_{n+1} \triangle \psi_n) ,$$

und zwar für jedes k. Man wendet die σ-Subadditivität von $\| \ \|$ an und hat $\varrho(\psi_k,\, \psi) \longrightarrow 0$. $\square$

Wir notieren weiter die

** Es ist — anders als im Beweis auf Seite 36 — noch zu berücksichtigen, daß hier $\psi_n(x) = \infty$ möglich ist!

Kapitel 7

Charakterisierung der $\| \;\|$-Konvergenz

Für Funktionen ψ_n, ψ *in* $\mathfrak{P}$ *gilt die Konvergenz* $\psi_n \longrightarrow \psi\,(\varrho)$ *genau dann, wenn*

1) (ψ_n) *eine* ϱ*-*CAUCHY*-Folge ist,*

2) eine Teilfolge mit $(\psi_{n_k} \bigtriangleup \psi)(x) \longrightarrow 0 \;\; (k \to \infty)$ *f. ü. existiert.*

Der *Beweis* läßt sich unmittelbar an die vorangehenden Überlegungen anschließen:

Aus der $\| \;\|$-Konvergenz folgt die CAUCHY-Konvergenz; danach gibt es ein θ, gegen das die Folge gemäß $\| \;\|$ konvergiert, und eine Teilfolge, die gegen θ punktweise fast-überall konvergiert; wie oben festgehalten, sind nun ψ und θ fast-überall gleich; das gibt die zweite Aussage. — Für die andere Richtung geht man von der gegebenen Teilfolge aus, von der wir ohne Einschränkung noch annehmen können, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho(\psi_{n_{k+1}}, \psi_{n_k}) \;<\; \infty\,;$$

wieder nach den Überlegungen zum Vollständigkeitssatz existiert eine Funktion θ, gegen die die Teilfolge und damit die gesamte Folge gemäß $\| \;\|$ konvergiert; nun hat man punktweise fast-überall die Konvergenz der Teilfolge sowohl gegen θ als auch — nach Voraussetzung — gegen ψ; diese Funktionen sind damit fast-überall gleich, und hieraus folgt schließlich die $\| \;\|$-Konvergenz auch gegen ψ. □

Kapitel 7

Änderung

. . . .

7.5 Starke halbadditive Integralnormen

Sei wieder $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge, $\mathfrak{E}'$ ein SV-System in $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{R})$ und $\| \;\|$ eine starke Integralnorm auf $\mathfrak{P}$. Wir nennen $\| \;\|$ „*halbadditiv auf* $\mathfrak{E}'$“, wenn für eine Folge von Funktionen (φ_n) in $\mathfrak{E}'$ aus

$$\sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} \varphi_n \right\| \;<\; \infty$$

stets folgt

$$\|\varphi_n\| \longrightarrow 0\,.$$

Änderung

Wir erinnern daran, daß etwa die Supremums-Norm, die wir zur Einführung des Integrals von Regelfunktionen verwendet haben, zwar stark, aber offenbar nicht halbadditiv ist; andererseits haben wir — wie wir noch sehen werden

— in den p-Normen des Kapitels 6 (für $1 < p < \infty$) Beispiele halbadditiver, jedoch nicht additiver starker Integralnormen.

Im folgenden sei die starke Integralnorm $\| \;\|$ halbadditiv auf dem SV-System $\mathfrak{E}'$.

Wir halten zuerst eine einfache Konsequenz fest:

Eine Funktion φ *aus* $\mathfrak{E}'$ *mit endlicher Integralnorm ist selbst punktweise fast-überall endlich.*

Zum *Beweis* betrachtet man $\varphi \bigtriangledown \varphi$. Dies gehört zu $\mathfrak{E}'$ und erfüllt offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi \bigtriangledown \varphi) \;\le\; \varphi\,.$$

So liefert die Halbadditivität: $\varphi \bigtriangledown \varphi$ ist eine Nullfunktion. Das entspricht der Behauptung. □

Im folgenden bezeichnen wir stets mit $\mathfrak{I}'$ die $\| \;\|$-Abschließung von $\mathfrak{E}'$. Wir zeigen weiter:

Dann ist $\| \;\|$ *auch halbadditiv auf* $\mathfrak{I}'$.

Zum *Beweis* sei also (ψ_n) eine Folge aus $\mathfrak{I}'$ mit

$$M := \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} \psi_n \right\| \;<\; \infty\,.$$

Es liegt nahe, nun eine Folge (φ_n) in $\mathfrak{E}'$ zu wählen mit etwa

$$\varrho(\psi_n, \varphi_n) \;\le\; 2^{-n}\,.$$

Gemäß Seite 80 kann man nun

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{k} \varphi_n\right) \bigtriangleup \left(\sum_{n=1}^{k} \psi_n\right) \right\| \;\le\; \sum_{n=1}^{k} \varrho(\varphi_n, \psi_n) \;\le\; 1$$

abschätzen. Das ergibt

$$\sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} \varphi_n \right\| \;\le\; M+1 \;<\; \infty\,,$$

also $\|\varphi_n\| \longrightarrow 0$. Damit hat man nach Konstruktion auch $\|\psi_n\| \longrightarrow 0$. □

Kapitel 7

Folgerung ist nun natürlich, daß auch eine *Funktion aus* $\mathfrak{I}'$ *mit endlicher Integralnorm* selbst *fast-überall endliche Werte* hat. Damit gilt:

Eine Funktion aus $\mathfrak{I}'$ *mit endlicher Integralnorm ist gleich fast-überall einer endlich-wertigen Funktion aus* $\mathfrak{I}'$.

Während wir oben den Ersten Konvergenzsatz und seine Folgerungen allgemein für starke Integralnormen und im übrigen alle Funktionen aus $\mathfrak{P}$ erhalten haben, benötigen die folgenden stärkeren Konvergenzsätze zusätzlich die

Halbadditivität auf $\mathfrak{E}'$ und beziehen sich auf die zugehörige Abschließung $\mathfrak{I}'$. Obwohl es sich um wesentliche Verallgemeinerungen einerseits und um Vorstufen für $[0, \infty]$-wertige Funktionen andererseits handelt, bezeichnen wir diese Sätze mit den bekannten Namen der Theorie des klassischen Lebesgue-Integrals.

Satz von Levi II $\Bigl($erste Fassung; Levi $\sum\Bigr)$

Seien ψ_k *Funktionen aus* $\mathfrak{I}'$*; wir bezeichnen*

$$\psi := \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \, .$$

Gilt dann

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \psi_k \right\| \, < \, \infty \, ,$$

so hat man

$$\varrho\left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k , \, \psi\right) \;\le\; \left\| \sum_{k\,=\,n+1}^{\infty} \psi_k \right\| \longrightarrow 0 \, .$$

Damit gilt

$$\psi \in \mathfrak{I}' \, , \quad \|\psi\| \, = \, \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \psi_k \right\| \, .$$

Der *Beweis* erfordert gegenüber der früher gewohnten Verwendung der Additivität nunmehr eine deutliche Modifikation, in der natürlich die Halbadditivität entscheidend sein wird.

Wir zeigen zunächst

$$(*) \qquad \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \psi_j \right\| \longrightarrow 0 \quad (m > n \longrightarrow \infty) \, ,$$

und zwar indirekt: Andernfalls hätte man ein $\varepsilon > 0$ und

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots$$

mit

$$(+) \qquad \gamma_\kappa := \sum_{j=n_\kappa+1}^{m_\kappa} \psi_j \quad (\in \mathfrak{I}') , \quad \|\gamma_\kappa\| \ge \varepsilon \quad (\kappa \in \mathbb{N}) \, .$$

Nun lassen sich aber andererseits offenbar alle endlichen Summen der γ_κ durch endliche Abschnitte der Reihe der ψ_j abschätzen. Damit liefert

$$\sup \left\| \sum_{\kappa=1}^{k} \gamma_\kappa \right\| \le \sup \left\| \sum_{j=1}^{n} \psi_j \right\| < \infty$$

zusammen mit (+) einen Widerspruch zur Halbadditivität der Integralnorm auf $\mathfrak{I}'$. Aufgrund der Zwischenbehauptung $(*)$ gewinnen wir nun in gewohnter

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 27. Juni 2006, 15:07 Uhr

Weise eine Teilfolge

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

mit

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\| \sum_{j=n_\kappa+1}^{n_{\kappa+1}} \psi_j \right\| \, < \, \infty \, .$$

Für $n \ge n_k$ kann man nun

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \psi_j\right) \triangle \, \psi \;\le\; \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_j \;\le\; \sum_{\kappa=k}^{\infty} \left(\sum_{j=n_\kappa+1}^{n_{\kappa+1}} \psi_j\right)$$

abschätzen. Das liefert mit der σ-Subadditivität von $\|\ \|$ für $k \longrightarrow \infty$

$$\varrho\left(\sum_{j=1}^{n} \psi_j , \, \psi\right) \;\le\; \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_j \right\| \;\le\; \sum_{\kappa=k}^{\infty} \left\| \sum_{j=n_\kappa+1}^{n_{\kappa+1}} \psi_j \right\| \longrightarrow 0 \, .$$

Das ergibt die Behauptungen. □

Man bemerkt sofort: *Aus der Gültigkeit des Satzes von* Levi *II folgt umgekehrt die Halbadditivität von* $\|\ \|$ *auf* $\mathfrak{I}'$. Mit der Halbadditivität ist also *die* Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Satzes und seiner Folgerungen gefunden.

Wir notieren zunächst noch als eine andere — vielleicht oft gewohntere — Fassung des Satzes von Levi den

Satz von Levi II $\Bigl($zweite Fassung; Levi $\uparrow\Bigr)$

Bilden die Funktionen ψ_n *eine aufsteigende Folge in* $\mathfrak{I}'$ *mit beschränkter Integralnorm und bezeichnet man mit* ψ *das Supremum der Folge, dann konvergieren die* ψ_n *gemäß* $\|\ \|$ *gegen* ψ*, das damit zu* $\mathfrak{I}'$ *gehört. Zugleich ist* $\|\psi\|$ *der aufsteigende Limes der Folge der* $\|\psi_n\|$.

Diese Fassung führt man mit

$$\varphi_1 := \psi_1 \, , \quad \varphi_{n+1} := \psi_{n+1} \triangle \, \psi_n$$

und damit ((vii), Seite 76 heranziehen) Änderung

$$\psi_n \, = \, \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu$$

auf die erste zurück. □

Da, wie wir bemerkten, Funktionen aus $\mathfrak{I}'$ mit endlicher Integralnorm selbst punktweise fast-überall endlich-wertig sind und zu überall endlich-wertigen Funktionen aus $\mathfrak{I}'$ ‚f. ü.-modifiziert' werden können, erhält man einfach durch

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 27. Juni 2006, 15:07 Uhr

Differenzenbildung eine Übertragung auf absteigende Folgen:

Folgerung 1 $\Big($LEVI $\downarrow\Big)$

Die Funktionen ψ_n mögen eine absteigende Folge in $\mathfrak{I}'$ bilden; es sei $\|\psi_1\| < \infty$ und schließlich mit ψ das Infimum der Folge bezeichnet. Dann konvergieren die ψ_n gemäß $\|\ \|$ gegen ψ, und diese Funktion gehört damit ebenfalls zu $\mathfrak{I}'$.

ausführen!

Wir empfehlen dem Leser, der die Zurückführung nicht sofort übersieht, die genauere Durchführung dieser Überlegung: Man ändert zunächst die ψ_n wie beschrieben zu endlich-wertigen Funktionen ab, beweist für diese die Behauptung und überträgt diese dann auf die ursprünglichen Funktionen.

Für manche Zwecke ist es bequem, die vorangehenden beiden Aussagen anstatt für Folgen für höchstens abzählbare Mengen von Funktionen zu formulieren. So erhält man zuerst fast sofort

Folgerung 2

Sei $\mathfrak{M}$ eine höchstens abzählbare Menge in $\mathfrak{I}'$. $\mathfrak{M}$ enthalte eine Funktion mit endlicher Integralnorm. Dann gilt

$$\inf\{\psi\,:\,\psi\in\mathfrak{M}\}\ \in\ \mathfrak{I}'\,.$$

Zum *Beweis* kann man $\mathfrak{M}$ als abzählbare Menge $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ mit $\|\varphi_1\| < \infty$ annehmen und auf die Folge

$$\psi_n := \inf\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$$

die Aussage der Folgerung 1 anwenden. □

Entsprechend erhält man aus dem Satz von LEVI II die etwas abgeschwächte

Folgerung 3

Sei $\mathfrak{M}$ eine nicht-leere höchstens abzählbare Menge in $\mathfrak{I}'$. Alle Funktionen aus $\mathfrak{M}$ seien majorisiert durch eine feste Funktion aus $\mathfrak{P}$ mit endlicher Integralnorm. Dann gilt

$$\sup\{\psi\,:\,\psi\in\mathfrak{M}\}\ \in\ \mathfrak{I}'\,.$$

Eine weitere fast unmittelbare Folgerung ist der

Satz von Fatou

Sei (ψ_n) eine Folge in $\mathfrak{I}'$ mit

$$\liminf\,\|\psi_n\|\ <\ \infty\,.$$

Dann gilt

$$\psi := \liminf\,\psi_n\ \in\ \mathfrak{I}'$$

Kapitel 7

und

$$\|\psi\|\ \le\ \liminf\,\|\psi_n\|\,.$$

Gemäß Folgerung 2 hat man

$$\gamma_n := \inf\{\psi_n,\,\psi_{n+1},\,\cdots\}\ \in\ \mathfrak{I}'$$

und hierfür natürlich

$$\|\gamma_n\|\ \le\ \inf\{\|\psi_n\|,\,\|\psi_{n+1}\|,\,\cdots\}\ \le\ \liminf\,\|\psi_k\|\ =:L\ <\ \infty\,.$$

Nun gilt

$$\gamma_n\ \uparrow\ \psi\,.$$

Jetzt kann der Satz von LEVI II ($\uparrow$) angewendet werden. Er liefert

$$\psi\ \in\ \mathfrak{I}'\,,\quad \|\psi\|\ \le\ L\,.$$ □

Schließlich erhalten wir in der folgenden etwas ungewohnten Form den

Satz von Lebesgue („*majorisierte Konvergenz*“) Änderung

Man habe in $\mathfrak{I}'$ eine absteigende Folge nicht-leerer höchstens abzählbarer Mengen:

$$\mathfrak{I}'\supset\mathfrak{M}_1\supset\mathfrak{M}_2\supset\cdots\,.$$

$\mathfrak{M}_1$ sei durch eine feste Funktion ψ aus $\mathfrak{P}$ mit endlicher Integralnorm majorisiert. Schließlich gelte punktweise für alle x aus $\mathfrak{R}$

$$s_n(x) := \sup\{\varphi(x)\,:\,\varphi\in\mathfrak{M}_n\}\ \longrightarrow\ 0\quad (n\longrightarrow\infty)\,.$$

Dann hat man bezüglich der Integralnorm

$$\sup\{\|\theta\|\,:\,\theta\in\mathfrak{M}_n\}\ \le\ \|s_n\|\ \longrightarrow\ 0\,.$$

Zum *Beweis* stellt man zunächst fest, daß nach der oben notierten Folgerung 3 die Funktionen s_n zu $\mathfrak{I}'$ gehören. Alle diese Funktionen, die absteigend punktweise gegen die Funktion 0 konvergieren, sind durch ψ majorisiert, haben also endliche Integralnorm. So kann jetzt auf diese Funktionen die Folgerung 1 angewendet werden, die die Behauptung ergibt. □

Wir vermerken noch, daß wir bei diesem Komplex von Sätzen darauf verzichtet haben, etwas allgemeinere fast-überall-Modifikationen zu notieren. Im Zusammenhang mit der diesbezüglichen obigen Bemerkung, daß Zugehörigkeit zu $\mathfrak{I}'$ und Integralnorm-Wert bei f. ü.-Abänderung erhalten bleiben, sollten die entsprechenden Schlußweisen wohl vertraut sein.

Die Übertragung der ‚Konvergenzsätze‘ auf BANACH-Raum-wertige Funktionen geht nun ganz einfach: Änderung

.... Auslassung

Kapitel 7