Kapitel 8

Vektorwertige Integrale vektorwertiger Funktionen

8.1 Prinzip der Integralerweiterung

In den vorangehenden Kapiteln haben wir uns auf ‚klassische' Inhalte und Maße, d. h. mit nicht-negativen Werten, beschränkt. Dabei werden jedoch schon im Zusammenhang mit STIELTJES- und Kurvenintegralen Verallgemeinerungen als wünschenswert erkannt. Den entscheidenden verallgemeinernden Schritt bringt dieses Kapitel. Wir beschränken uns dabei allerdings auf Funktionen mit Werten in einem normierten Vektorraum und Integrale mit Werten in einem zweiten ebensolchen Raum. In wichtigen Fällen bedeutet dies die Erzeugung von Integralen durch entsprechende operatorwertige Inhalte, die wir im folgenden Kapitel eingehender betrachten. Änderung

Der Leser wird sich an entsprechende frühere Bemerkungen erinnern und sofort feststellen, daß das dargestellte integrationstheoretische Konzept die angestrebte Verallgemeinerung nicht nur ermöglicht, sondern sie in fast selbstverständlicher Weise hinzuschreiben gestattet. Er wird auch gewiß sehen, daß der Grad der Allgemeinheit dieser Überlegungen keineswegs Selbstzweck ist. Dieser ist zumindest wünschenswert für eine angemessene Behandlung etwa von Kurvenintegralen und entsprechenden Integralen der Funktionalanalysis, speziell der Spektraltheorie. Änderung

Wir gehen von den folgenden *Grundannahmen* aus, auf die wir uns im folgenden mehrfach beziehen werden:

> $\mathfrak{R}$ sei eine nicht-leere Menge. Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir stets den reellen oder komplexen Zahlkörper. $\mathfrak{B}_1$ sei ein normierter Vektorraum, $\mathfrak{B}_2$ ein BANACH-Raum über $\mathbb{K}$, beide $\neq \{0\}$. In beiden Räumen bezeichnen wir die Norm mit $|\ \ |$. $\mathfrak{F}$ sei der Vektorraum (über $\mathbb{K}$) der Funktionen auf $\mathfrak{R}$ mit Werten in $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{E}$ ein Unterraum von $\mathfrak{F}$. i sei nun eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{B}_2$ und $\|\ \ \|'$ eine Integralnorm auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}) =: \mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft

Kapitel 8

Kapitel 8

$$\left|i(h)\right| \;\leq\; \|\,|h|\,\|'$$

für h aus $\mathfrak{E}$.

Hierzu sollten wir erläuternd folgendes sagen:

Auslassung

....

Die Vollständigkeit des Werteraums der Integrale wird natürlich benötigt, weil die Integralfortsetzung Limites von CAUCHY-Folgen benutzt. Die Annahme, daß die beiden Räume ‚nicht-trivial', d. h. $\neq \{0\}$, sind, haben wir eingesetzt, um andernfalls gelegentlich notwendige Fallunterscheidungen, die eben nur Triviales beinhalten, zu vermeiden. i werden wir im Hinblick auf die Hauptanwendungen auch wieder als *„elementares Integral"* ansprechen. Beachtet werden sollte ausdrücklich die nunmehr geänderte Bezeichnungsweise bei den Integralnormen: Im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitel, bei dem die durchgängige Notierung eines $'$ unbequem gewesen wäre, bezeichnen wir hier Integralnormen auf $\mathfrak{P}$ mit $\|\ \|'$, um für $\mathfrak{F}$, das hier mehr im Vordergrund steht,

$$\|\ \| := \|\ \|' \circ |\ \ |$$

erklären zu können. Der Leser wird bemerken, daß wir demgegenüber im vorangehenden Kapitel die Bezeichnung $\mathfrak{E}'$ im Hinblick auf dieses Kapitel schon eingesetzt haben. Die Vektoroperationen für $\mathfrak{F}$ sind natürlich punktweise definiert; dasselbe gilt für die Norm-Bildung, die in der letzten Formel schon auftrat, und mit

$$|f|(x) := |f(x)|$$

die immer wieder wichtige kanonische Abbildung von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{P}$ liefert. Die letzte Forderung an elementares Integral und Integralnorm — wir sprechen in diesem Zusammenhang wieder von *„geeignet"* — kann dann auch

$$\left|i(h)\right| \;\leq\; \|h\|$$

geschrieben werden.

Kapitel 8

Die ‚Integralnorm' $\|\ \|$ auf $\mathfrak{F}$ erzeugt in gewohnter Weise mit

$$\varrho(f,g) := \|f-g\|$$

eine *Pseudometrik für* $\mathfrak{F}$. Es sollte beachtet werden, daß $\|\ \|$ nicht notwendig eine Pseudonorm ist, da wir hier keine Homogenität gefordert haben. Natürlich bezeichnen wir die zu $\|\ \|'$ gehörende Pseudometrik auf $\mathfrak{P}$ mit ϱ':

$$\varrho'(\varphi,\,\psi) := \|\varphi \mathbin{\Delta} \psi\|'\,.$$

Diesbezüglich notieren wir einige einfache Eigenschaften:

(a) $|\ \ |$ *ist* bezüglich der genannten Pseudometriken gleichmäßig *stetig*; genauer gilt:
$$\varrho'(|f|,\,|g|) \;\leq\; \varrho(f,\,g)\,.$$

(b) $+$ *ist* in $\mathfrak{F}$ gleichmäßig *stetig* wegen
$$\varrho(f+g,\,f'+g') \;\leq\; \varrho(f,\,f') + \varrho(g,\,g')\,.$$

(c) Bei festem $\alpha \in \mathbb{K}$ ist die Abbildung $f \longmapsto \alpha f$ gleichmäßig *stetig*; denn mit $|\alpha| \leq k \in \mathbb{N}$ hat man
$$\varrho(\alpha f,\,\alpha g) \;\leq\; k\,\varrho(f,\,g)\,.$$

(d) $\|\ \|$ auf $\mathfrak{F}$ *ist* eine gleichmäßig *stetige* Abbildung in $[0,\,\infty]$ wegen
$$\|f\| \mathbin{\Delta} \|g\| \;\leq\; \varrho(f,\,g)\,.$$

(e) i *ist* eine gleichmäßig *stetige* Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{B}_2$ mit
$$\left|i(h)-i(g)\right| \;\leq\; \varrho(h,\,g)\,.$$

Hier ist nur bei (c) eine kleine Veränderung gegenüber dem Gewohnten erforderlich: Statt der nicht geforderten Homogenität wird nur die Subadditivität benutzt. ausführen!

Die obigen Grundannahmen reichen nun aus für das folgende allgemeinere

Fortsetzungsprinzip

Die Abschließung $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{E}$ bezüglich ϱ, kurz $\mathfrak{I} = \overline{\mathfrak{E}}$, ist ein $\mathfrak{E}$ umfassender Unterraum von $\mathfrak{F}$.

Es existiert eindeutig eine stetige Fortsetzung $\bar{\imath}$ von i auf $\mathfrak{I}$. Diese ist $\mathbb{K}$-linear mit
$$\left|\bar{\imath}(f)\right| \;\leq\; \|f\|\,,$$
also auch gleichmäßig stetig.

Kapitel 8

Hierzu zunächst einige Bemerkungen: Wie schon im Zusammenhang mit den p-Normen zu verwenden ist, ist natürlich auch der triviale Fall $i=0$ noch von Bedeutung. — Natürlich sind wesentliche Verallgemeinerungen möglich; wie schon oben betont, beschränken wir uns auf die dargestellte Situation. — In der Anwendung wird meist $\mathfrak{E}$ ein Raum *„einfacher Funktionen"* und hier i ein *„elementares Integral"* sein. $\mathfrak{I}$ wird dann die Menge der *„integrablen Funktionen"* mit dem durch die gegebene Fortsetzung erhaltenen *„Integral"* $\bar{\imath}$. — Meist werden wir im folgenden statt $\bar{\imath}$ wieder i schreiben.

Den *Beweis* sollten wir hier der Vollständigkeit halber in den wesentlichen Schritten darstellen, obwohl sich dabei bestätigt, daß er sich in Durchführung und Notierung gar nicht vom bekannten Spezialfall unterscheidet.

- Man überlegt: *Falls* $\bar{\imath}$ eine stetige Fortsetzung von i auf $\mathfrak{I}$ ist, so folgt für f aus $\mathfrak{I}$ und eine ‚approximierende Folge' (h_n) aus $\mathfrak{E}$ (das heißt $\|h_n - f\| \longrightarrow 0$)
$$\bar{\imath}(f) \;=\; \lim i(h_n)\,.$$
Dies zeigt einerseits die Eindeutigkeit und liefert andererseits den Hinweis auf die folgende Definition.

- Ist f aus $\mathfrak{I}$, so kann mit einer approximierenden Folge (h_n) aus $\mathfrak{E}$
$$\bar{\imath}(f) \;:=\; \lim i(h_n)$$
definiert werden: Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von i erhält man nämlich aus der CAUCHY-Folge (h_n) bezüglich ϱ stets eine CAUCHY-Folge $(i(h_n))$ in $\mathfrak{B}_2$. Diese hat einen Limes in $\mathfrak{B}_2$ aufgrund der Vollständigkeit. Der Limes ist schließlich unabhängig von der Auswahl der approximierenden Folge. Dies kann man entweder zeigen, indem man sich noch einmal in naheliegender Weise auf die gleichmäßige Stetigkeit stützt, oder einfacher mit dem dem Leser vom Spezialfall her bekannten Argument, das die ‚Mischung' zweier approximierender Folgen benutzt.

- Daß $\bar{\imath}$ eine Fortsetzung von i ist (und $\mathfrak{I}$ den Raum $\mathfrak{E}$ umfaßt), zeigt wieder die Betrachtung konstanter Folgen.

ausführen!

- $\mathfrak{I}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $\bar{\imath}$ ist linear, beides aufgrund der Stetigkeit der Vektorraum-Operationen.

Änderung ausführen!

- Die angegebene Abschätzung von $\bar{\imath}$ durch $\|\ \|$ folgt schließlich durch Betrachtung einer approximierenden Folge über die Definition von $\bar{\imath}$ mit der Stetigkeit von $\big|\ \big|$.

□

Fast trivial sind aufgrund der Definition und der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{I}$ die beiden Feststellungen:

Ist die Integralnorm auf $\mathfrak{E}$ endlich, so auch auf $\mathfrak{I}$.

Die Wiederholung des Fortsetzungsverfahrens mit $\mathfrak{I}$ und $\bar{\imath}$ (mit der gleichen Integralnorm) liefert nichts Neues, d. h. keine echte Fortsetzung mehr.

Als einfache Ergänzung notieren wir wie oben das

Vergleichsprinzip

Ist zusätzlich $\|\ \|_1'$ eine Integralnorm auf $\mathfrak{P}$ mit
$$\|\ \|' \;\le\; \|\ \|_1'\,,$$
so ist neben der ursprünglichen auch diese geeignet. Für die zugehörige Abschließung und Fortsetzung gilt $\bar{\imath} \supset \overline{\imath_1}$: Es ist also $\mathfrak{I}_1$ ein Unterraum von $\mathfrak{I}$, und auf $\mathfrak{I}_1$ stimmen $\bar{\imath}$ und $\overline{\imath_1}$ überein.

Kapitel 8

8.2 Starke Integralnormen

Die *Grundannahmen* des vorigen Abschnitts ergänzen wir im folgenden durch die *Forderungen*:

$\|\ \|'$ sei eine *starke* Integralnorm auf $\mathfrak{P}$,
$\mathfrak{B}_1$ sei ebenfalls BANACH-Raum.

Wir können dann zunächst wieder zeigen:

Erster Konvergenzsatz

Für eine Folge von Funktionen (f_n) in $\mathfrak{F}$ gelte
$$\Big\| \sum_{n=m}^{\infty} |f_n| \Big\|' \longrightarrow 0 \qquad (m \longrightarrow \infty)\,.$$
Dann gilt:

(a) Für fast alle x aus $\mathfrak{R}$ ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|f_n(x)\big| \;<\; \infty\,.$$

(b) Ist f eine — nach (a) existierende — Funktion aus $\mathfrak{F}$ mit
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \;=\; f(x) \quad \text{f. ü.}\,,$$
so konvergieren die Partialsummen auch bezüglich ϱ gegen f:
$$\varrho\Big(\sum_{n=1}^{m} f_n,\, f\Big) \longrightarrow 0 \qquad (m \longrightarrow \infty)\,.$$

(c) Sind speziell die Funktionen f_n aus $\mathfrak{I}$, so liegt auch f in $\mathfrak{I}$ und man hat
$$\sum_{n=1}^{\infty} i(f_n) \;=\; i(f)\,.$$

Zum *Beweis* ist für (a) nur die entsprechende Aussage in $\mathfrak{P}$ (vgl. Seite 81 f) bezüglich der endlich-wertigen Funktionen $\big|f_n\big|$ heranzuziehen. (b) folgert man aus
$$\Big|f(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\Big| \;\le\; \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{f. ü.}\,,$$
was dann

Kapitel 8

$$\varrho\Big(\sum_{n=1}^{m} f_n,\, f\Big) \;\le\; \Big\|\sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n|\Big\|' \longrightarrow 0$$

ergibt. (c) ist dann mit der (Linearität und) Stetigkeit von i gegeben. □

Wie im Spezialfall (Seite 36) — wir erinnern an die geeignete Auswahl einer Teilfolge — erhält man hieraus fast unmittelbar den

Vollständigkeitssatz

$\mathfrak{F}$ ist bezüglich der Pseudometrik ϱ vollständig. Damit ist auch $\mathfrak{I}$ bezüglich ϱ vollständig.

Schließlich gehört in diesen Zusammenhang wieder die

Charakterisierung von Konvergenz bezüglich der Integralnorm

Für Funktionen f_n und f aus $\mathfrak{F}$ gilt die Konvergenz $f_n \longrightarrow f\ (\varrho)$ genau dann, wenn

1) (f_n) eine Cauchy-Folge bezüglich ϱ ist und

2) eine Teilfolge existiert, die punktweise fast-überall gegen f konvergiert.

Den *Beweis* kann man wie oben (man vergleiche S. 36 oder auch S. 84f) führen. Die Aussage dieses Satzes folgt aber auch ziemlich direkt aus der entsprechenden Aussage für Funktionen in $\mathfrak{P}$ (Kapitel 7) folgt. Man verwendet dazu

ausführen!

$$\psi_n := \big|f_n - f\big|,\ \psi := 0$$

und benutzt für die eine Richtung noch

$$\varrho'(\psi_n,\, \psi_m) \;\le\; \varrho(f_n,\, f_m)\,. \qquad □$$

8.3 Starke halbadditive Integralnormen

Kapitel 8

Zusätzlich zu den *Grundannahmen* vom Beginn dieses Kapitels und den ergänzenden *Forderungen des vorangehenden Abschnitts* gehen wir jetzt davon aus, daß

> $\mathfrak{E}'$ ein SV-System in $\mathfrak{P}$ ist, das für jede Funktion h aus $\mathfrak{E}$ die Funktion $|h|$ enthält, kurz also $|\mathfrak{E}| \subset \mathfrak{E}'$, und die Integralnorm $\|\ \|'$ auf $\mathfrak{E}'$ halbadditiv ist.

Als bekannt kann dann zunächst notiert werden:

Die ϱ'-Abschließung $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{E}'$ ist ebenfalls ein SV-System. $\|\ \|'$ ist dort halbadditiv. Es gilt

$$\big|\mathfrak{I}\big| \subset \mathfrak{I}'\,.$$

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 27. Juni 2006, 19:18 Uhr

Die letzte Aussage folgt aus der (gleichmäßigen) Stetigkeit von $|\ |$ bezüglich der beiden Pseudometriken; man vergleiche S. 93, Aussage (a). □

Als erstes wesentliches Resultat dieses Abschnitts erhalten wir nun im Rahmen der betrachteten $\mathfrak{B}_1$-wertigen Funktionen ganz einfach den

Satz von Levi

Seien f_n Funktionen aus $\mathfrak{I}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_n \Big\|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\Big\|' \;<\; \infty\,.$$

Dann existiert eine Funktion f aus $\mathfrak{I}$ mit

$$\varrho\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k,\, f\Big) \longrightarrow 0$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \;=\; f(x) \quad f.\,ü.\,.$$

Für jedes solche f gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} i(f_k) \;=\; i(f)\,.$$

Zum *Beweis* ergibt sich für $\psi_n := \big|f_n\big| \in \mathfrak{I}'$ mit dem Satz von Levi II des Kapitels 7 zunächst Änderung

$$\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|\Big\|' \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\,.$$

Damit liefert der ‚Erste Konvergenzsatz' (dieses Kapitels) die volle Behauptung. □

Ähnlich einfach gewinnt man die entsprechende Verallgemeinerung des Satzes über **‚majorisierte Konvergenz'**:

Satz von Lebesgue

Es seien f_n Funktionen aus $\mathfrak{I}$, f aus $\mathfrak{F}$ und ψ aus $\mathfrak{P}$. Für sie gelte:

1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *f. ü.*,

2) $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| \le \psi(x)$ *f. ü.* $\big((n,m) \in \mathbb{N}^2\big)$,

3) $\|\psi\|' < \infty$.

Dann hat man

$$\varrho(f_n,\, f) \longrightarrow 0$$

und damit $f \in \mathfrak{I}$ mit $i(f_n) \longrightarrow i(f)$.

Kapitel 8

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 27. Juni 2006, 19:18 Uhr

Wieder wird der *Beweis* auf den entsprechenden Satz des Kapitels 7 zurückgeführt. Dabei genügt es — diese Modifikationen haben wir bereits mehrfach besprochen — anzunehmen, daß sowohl die geforderte punktweise Konvergenz in 1) als auch die Abschätzung in 2) nicht nur fast-überall, sondern überall gelten. Man führt dann für n aus $\mathbb{N}$ die Mengen

$$\mathfrak{M}_n := \left\{ \left| f_k - f_m \right| : k,\, m \geq n \right\}$$

ein. Offenbar sind für diese die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue aus Kapitel 7 gegeben. So bestätigt man (f_n) als ϱ-Cauchy-Folge und gewinnt mit der Charakterisierung der $\| \ \|$-Konvergenz die Behauptung. □

Wir haben in der Voraussetzung 2) die Abschätzung der Differenzen durch eine Funktion mit endlicher Integralnorm verlangt. Da die Funktionen aus $\mathfrak{I}$ nicht notwendig endliche Integralnorm haben, ist dies echt schwächer als die gewohnte Forderung der Majorisierbarkeit der Funktionen selbst.

Auslassung ....

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 27. Juni 2006, 19:18 Uhr