Kapitel 9

Operatorwertige Inhalte und schwache Maße

In diesem Kapitel verbinden wir die Überlegungen des vorangehenden, in dem vektorwertige Integrale und Funktionen betrachtet wurden, mit denen des Kapitels 2, das die Gewinnung von Integralen aus klassischen Inhalten auf Prä-Ringen darstellte. Dies bedeutet natürlich, daß jetzt vektor- oder besser operatorwertige Inhalte und — in bestimmtem Sinne — Maße den Ausgangspunkt bilden. Es ergibt sich damit ein Integralbegriff, der als ein *„verallgemeinertes* STIELTJES-*Integral“* angesehen werden kann. Änderung

Vektorwertige Funktionen konnten schon in Kapitel 2 — im Zusammenhang mit klassischen Inhalten — ohne jede Schwierigkeit einbezogen werden. Wesentlich neue Aspekte bringen erst die allgemeineren Inhalte mit sich. Einige Dinge ändern sich schon wesentlich, wenn reellwertige Inhalte (mit möglichem Vorzeichenwechsel) ins Spiel kommen. Änderung

9.1 Inhalte, einfache Funktionen und elementares Integral

Wir gehen aus von den folgenden *Annahmen:*

> Es seien $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge, $\mathbb{S}$ ein Prä-Ring über $\mathfrak{R}$, $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{R},\, \mathfrak{B}_1)$ bezeichnen wir — wie gewohnt — den Raum aller Funktionen auf $\mathfrak{R}$ mit Werten in $\mathfrak{B}_1$. Dazu benötigen wir jetzt den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1,\, \mathfrak{B}_2)$ der linearen Abbildungen von $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{B}_2$. Wir bezeichnen eine Abbildung

$$\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{L}$$

als *„Inhalt“*, wenn sie *endlich-additiv* ist, d. h., wenn aus

Kapitel 9

$$A = \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $A,\ A_\nu$ aus $\mathbb{S}$ stets folgt

$$\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\,.$$

Natürlich ist dann $\mu(\emptyset) = 0 \quad (\in \mathfrak{L})$.

Auslassung

....

In sinngemäßer Verallgemeinerung des skalaren Falles bilden wir

$$\mathfrak{E}_0 \;:=\; \mathfrak{E}_0(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathfrak{B}_1) := \Big\{\chi_A\, b :\ A \in \mathbb{S},\, b \in \mathfrak{B}_1\Big\},$$

die Menge der *„einfachsten Funktionen"*, und daraus als lineare Hülle den Unterraum

$$\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathfrak{B}_1) := \operatorname{span} \mathfrak{E}_0$$

der *„einfachen Funktionen"* in $\mathfrak{F}$. Dazu bemerken wir:

(a) Man erhält dieselben einfachen Funktionen, wenn man von $R(\mathbb{S})$, dem von $\mathbb{S}$ erzeugten Ring, an Stelle von $\mathbb{S}$ ausgeht.

(b) Einfache Funktionen h besitzen stets ‚Darstellungen'

$$h = \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu} a_\nu \qquad (A_\nu \in \mathbb{S},\ a_\nu \in \mathfrak{B}_1)\,.$$

(c) Endlich viele Funktionen aus $\mathfrak{E}$ besitzen stets *‚gemeinsame Darstellungen'* mit einem festen System *paarweise disjunkter* Mengen $A_1,\, A_2,\, \cdots, A_n$ aus $\mathbb{S}$.

(d) Für h aus $\mathfrak{E}$ und A aus $R(\mathbb{S})$ liegen die Produkte

$$\chi_A\, h\,, \quad \chi_{\widetilde{A}}\, h$$

wieder in $\mathfrak{E}$.

Änderung

Nur für (c) sollten wir vielleicht noch einmal an die ‚Zerlegungseigenschaft' für $\mathbb{S}$ erinnern.

Von besonderem Interesse sind nun $(\mathbb{K})$-lineare Abbildungen

$$i\colon \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{B}_2\,,$$

die wir auch als *„elementare Integrale"* bezeichnen. Die bekannte Überlegung im klassischen Falle ergibt auch hier eine bijektive Beziehung zwischen den

Kapitel 9

elementaren Integralen und den ($\mathfrak{L}$-wertigen) Inhalten auf $\mathbb{S}$:

Ist i ein elementares Integral, so liefert

$$\mu(A)\, b \;:=\; i(\chi_A\, b) \qquad (A \in \mathbb{S},\ b \in \mathfrak{B}_1)$$

einen Inhalt μ auf $\mathbb{S}$ mit Werten in $\mathfrak{L}$.

Denn die Linearität von i ergibt zunächst die lineare Abhängigkeit von b, also $\mu(A)$ in $\mathfrak{L}$, und natürlich weiter mit Änderung

$$\chi_A \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu} \qquad \text{für } A, A_\nu \in \mathbb{S} \text{ mit } A = \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

die endliche Additivität. □

Ist μ ein ($\mathfrak{L}$-wertiger) Inhalt, so liefert

$$i(h) \;:=\; \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\, a_\nu$$

für eine einfache Funktion mit der Darstellung

$$h \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu} a_\nu$$

ein elementares Integral.

Hierbei ist wieder der wesentliche Schritt der Nachweis der Unabhängigkeit von der Darstellung: Der Beweis aufgrund von Additivität und Zerlegungseigenschaft läßt sich fast wörtlich aus den ersten Seiten des Kapitels 1 übertragen; die entsprechenden Formeln sind nur mit der veränderten Bedeutung zu interpretieren. — Offenbar gilt: ausführen!

Die gegebenen Zuordnungen $i \longmapsto \mu$ und $\mu \longmapsto i$ sind zueinander invers.

Wir vermerken noch einmal: Die Betrachtung operatorwertiger Inhalte ist keineswegs künstlich, sondern tritt zwangsläufig im Zusammenhang mit vektorwertigen Integralen vektorwertiger einfacher Funktionen auf.

Implizit in dieser Betrachtungsweise enthalten — man vergleiche die obige Aussage (a) — ist wieder die Feststellung:

Ein Inhalt auf dem Prä-Ring $\mathbb{S}$ läßt sich eindeutig zu einem Inhalt auf dem erzeugten Ring $R(\mathbb{S})$ fortsetzen.

Wir bezeichnen stets diese kanonische Fortsetzung mit dem gleichen Symbol.

Kapitel 9

9.2 Integralabschätzung; Semivariation

Änderung

Eine Integralabschätzung — zunächst auf dem elementaren Bereich — kann sich natürlich nur auf die speziellere Situation beziehen, in der die zugrundegelegten Vektorräume normiert sind. Wir nehmen an:

> $\mathbb{S}$ sei ein Prä-Ring von Teilmengen einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$.
> $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ seien Banach-Räume über $\mathbb{K}$, dazu beide nicht-trivial, also nicht nur aus 0 bestehend.
> i sei $\mathfrak{B}_2$-wertiges elementares Integral auf $\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathfrak{B}_1)$ und
> $$\mu \colon R(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$$
> der zugehörige Inhalt.

(Einerseits sieht der aufmerksame Leser sicher sofort, daß für viele Teilaussagen die Vollständigkeit von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nicht benötigt wird; zum anderen bedeutet aber diese zusätzliche Forderung angesichts der Möglichkeit der Erweiterung eines beliebigen normierten Vektorraums zu einem Banach-Raum (Vervollständigung) keine wesentliche Einschränkung.)

Natürlich kann jetzt
$$\mathfrak{E}' := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{S}, \mathbb{R})^+ ,$$
die Menge der nicht-negativen reellen einfachen Funktionen zu $\mathbb{S}$, herangezogen werden. Man vermerkt die Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{E}'$ ist ein SV-System und darüber hinaus abgeschlossen gegenüber Produktbildung.

(b) Es ist $\mathfrak{E}' = |\mathfrak{E}|$. $\big($Wir erinnern an $|f|(x) := |f(x)|$ mit der Norm in $\mathfrak{B}_1$.$\big)$

(c) Für φ aus $\mathfrak{E}'$ und b aus $\mathfrak{B}_1$ gilt $\varphi b \in \mathfrak{E}$, damit allgemeiner auch $\varphi h \in \mathfrak{E}$ für h aus $\mathfrak{E}$.

ausführen!

Diese Eigenschaften bestätigt man sofort, indem man gegebenenfalls gemeinsame Darstellungen mit paarweise disjunkten Mengen heranzieht, wegen der Bilinearität der Produktbildung auf einfachste Funktionen reduziert und schließlich — hier ist die oben gemachte Annahme wesentlich — die Existenz eines b aus $\mathfrak{B}_1$ mit der Norm 1 beachtet. □

Kapitel 9

Änderung

Als Integralabschätzung für φ aus $\mathfrak{E}'$ definieren wir:

$$\sigma(\varphi) := \sup\big\{ |i(h)| : h \in \mathfrak{E} \wedge |h| \le \varphi \big\} .$$

Bei aller Einfachheit und Natürlichkeit dieser Bildung sollte der Leser nicht zu rasch darüber hinweggehen und sich die Abhängigkeit von den beiden Räumen und insbesondere von den beiden Normen bewußt machen.

Es zeigt sich:

σ ist eine homogene Integralnorm auf $\mathfrak{E}'$.

Natürlich gelten
$$\sigma \colon \mathfrak{E}' \longrightarrow [0, \infty] , \quad \sigma(0) = 0 .$$
Auch die Homogenität
$$\sigma(\alpha\,\varphi) = \alpha \cdot \sigma(\varphi) \qquad \big(\alpha \in [0, \infty[\big) ,$$
bei der wieder die Verabredung $0 \cdot \infty := 0$ zu beachten ist und beim Beweise sonst nur *eine* Ungleichung gezeigt werden muß, ist sofort erkennbar. Für ausführen!
$$\varphi \le \varphi_1 + \varphi_2 \implies \sigma(\varphi) \le \sigma(\varphi_1) + \sigma(\varphi_2)$$
allerdings ist es notwendig zu zeigen: Ist h aus $\mathfrak{E}$ mit $|h| \le \varphi$, so gibt es eine Zerlegung $h = h_1 + h_2$ mit $|h_\nu| \le \varphi_\nu$ und $h_\nu \in \mathfrak{E}$. Das läßt sich direkt angeben:
$$h_\nu(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}\, h(x) & (h(x) \ne 0), \\ 0 & (\text{sonst}), \end{cases}$$
wobei man mit Hilfe gemeinsamer Darstellungen von φ_1, φ_2 und h mit paarweise disjunkten Mengen die Funktionen als einfach erkennt. Hat man dies, so folgt
$$|i(h)| \le |i(h_1)| + |i(h_2)| \le \sigma(\varphi_1) + \sigma(\varphi_2)$$
und durch Übergang zum Supremum links die behauptete Subadditivität von σ. □

Trivial ist die Abschätzung:
$$|i(h)| \le \sigma(|h|) \qquad (h \in \mathfrak{E}) .$$
Sie zeigt, daß alle Integralnormen auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{R})$, die auf $\mathfrak{E}'$ nicht kleiner ausfallen als σ, für die Fortsetzung von i *geeignet* sind.

Eine wiederum natürliche Bildung im Zusammenhang mit σ ist die Spezialisierung auf charakteristische Funktionen:
$$\widetilde{\mu}(A) := \sigma(\chi_A) \qquad \big(A \in R(\mathbb{S})\big) .$$

Kapitel 9

Sie wird als *„Semivariation"* zu μ bezeichnet und kann offenbar, wenn man i nicht benutzen will, in der Form
$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\left\{ \left|\sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu) a_\nu\right| : A_\nu \in \mathbb{S},\ \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu = A,\ a_\nu \in \mathfrak{B}_1,\ |a_\nu| \le 1 \right\}$$

beschrieben werden. Auch hier beachte man noch einmal die Abhängigkeit von den beiden Räumen und ihren Normen. — Schon ganz allgemein ergab sich:

$\widetilde{\mu}$ ist ein äußerer Inhalt auf $R(\mathbb{S})$.

Dazu bestätigt man unmittelbar aus den Definitionen von $\widetilde{\mu}$ einerseits und der Abbildungsnorm auf $\mathfrak{L}$:

$$|\mu(A)| \,\leq\, \widetilde{\mu}(A) \qquad (A \,\in R(\mathbb{S}))\,.$$

In diesem Zusammenhang sollte deutlich sein, daß wir für die Abbildungen aus $\mathfrak{L}$ *keine Beschränktheit* gefordert haben, für die Abbildungsnorm also der Wert ∞ zugelassen ist.

Eine Vergröberung gegenüber der Semivariation stellt die *„Totalvariation"* dar:

$$|\mu|(A) \,:=\, \sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\mu(A_\nu)| : \, A_\nu \,\in \mathbb{S}, \, \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu \,\subset\, A\right\},$$

was man für alle Teilmengen A von $\mathfrak{R}$ bilden kann. Man erkennt sofort:

$$\widetilde{\mu}(A) \,\leq\, |\mu|(A) \qquad (A \,\in R(\mathbb{S}))\,.$$

Für einige Eigenschaften der Totalvariation verweisen wir auf die Übungsaufgaben des Buches. Wir vermerken insbesondere, daß aus der Additivität von μ folgt: ausführen!

$|\mu|$ ist ein $[0,\infty]$-wertiger Inhalt auf $R(\mathbb{S})$.

Wir ergänzen die notierten Ungleichungen noch durch Abschätzungen von σ mit Hilfe der Semivariation und erst recht der Totalvariation:

Ist φ aus $\mathfrak{E}'$ und mit nicht-negativen Zahlen α_ν sowie A_ν aus $R(\mathbb{S})$

$$\varphi \,\leq\, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \, \chi_{A_\nu}\,,$$

so gilt

$$\sigma(\varphi) \,\leq\, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \, \widetilde{\mu}(A_\nu) \,\leq\, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \, |\mu|(A_\nu)\,.$$

Damit hat man speziell

$$\sigma(\varphi) \,\leq\, \sup \varphi(x) \cdot \widetilde{\mu}(\operatorname{Tr}\varphi) \,\leq\, \sup \varphi(x) \cdot |\mu|(\operatorname{Tr}\varphi)\,.$$

Kapitel 9

9.3 Mögliche ‚geeignete' Integralnormen

Wie in Kapitel 1 kann stets die folgende *Verallgemeinerung* der Riemann-Darboux-*Norm* gebildet werden: Man bildet zunächst für Funktionen ψ auf $\mathfrak{R}$ mit endlichen nicht-negativen Werten ($\psi \,\in \mathfrak{P}_e$)

$$\|\psi\|_R' \,:=\, \inf\left\{\sigma(\varphi) : \, \psi \,\leq\, \varphi \,\in\, \mathfrak{E}'\right\}$$

und setzt dies mit

$$\|\psi\|_R' \,:=\, \sup\left\{\|\theta\|_R' \,:\, \psi \,\geq\, \theta \,\in\, \mathfrak{P}_e\right\}$$

auf ganz $\mathfrak{P}$ fort.

$\|\ \|_R'$ *ist* aufgrund der Eigenschaften von σ eine *homogene Integralnorm*, die auf $\mathfrak{E}'$ mit σ übereinstimmt und daher (für i) ‚geeignet' ist. Offenbar gilt auch hier wieder:

$\|\ \|_R'$ ist die größte Integralnorm auf $\mathfrak{P}_e$, die auf $\mathfrak{E}'$ mit σ übereinstimmt.

Wir nehmen an, daß dem Leser die wenigen Beweisschritte hierzu schon geläufig sind; andernfalls ist die Übertragung vom klassischen Spezialfall her eine einfache Übungsaufgabe. ausführen!

. . . . Auslassung

Verhältnismäßig grobe Normen lassen sich gemäß der Idee des klassischen Integrals von Regelfunktionen bilden, indem man neben der sup-Norm Schranken für die Semivariation oder gar Totalvariation heranzieht. Wir verwenden Änderung

$$s \,:=\, \sup\left\{\widetilde{\mu}\,(A) : \, A \,\in\, R(\mathbb{S})\right\}$$

und

$$v \,:=\, |\mu|\,(\mathfrak{R}) \quad \left(=\, \sup\left\{|\mu|\,(A) : \, A \,\in\, R(\mathbb{S})\right\}\right)$$

und erklären damit

$$\|\psi\|_s' \,:=\, s \cdot \sup\left\{\psi(x) : \, x \,\in\, \mathfrak{R}\right\} \qquad (\psi \,\in\, \mathfrak{P})$$

und

$$\|\psi\|_v' \,:=\, v \cdot \sup\left\{\psi(x) : \, x \,\in\, \mathfrak{R}\right\} \qquad (\psi \,\in\, \mathfrak{P})\,,$$

wobei $0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$ zu lesen ist.

Wie die sup-Norm sind dies homogene starke Integralnormen auf $\mathfrak{P}$; aufgrund der oben notierten Abschätzungen für σ sind sie überdies beide (für i) ‚geeignet'. Natürlich hat man

$$\|\ \|_s' \,\leq\, \|\ \|_v'\,.$$

. . . . Auslassung

Vom klassischen Fall her überträgt man die Abschätzung

$$\|\ \|_R' \,\leq\, \|\ \|_s'\,,$$

allerdings *unter den Voraussetzungen* ausführen!

Kapitel 9

$$\mathfrak{R} \in R(\mathbb{S}), \qquad 0 < s \leq \infty;$$

Dazu möge der Leser sich als Übungsaufgabe (9.2.5) (des Buches) überlegen, daß die letzte Ungleichung i. a. falsch wird, wenn nur eine der beiden Voraussetzungen nicht gegeben ist. Natürlich erhält man mit diesen Integralnormen *echte* Erweiterungen höchstens dann, wenn s bzw. v endlich sind.

Änderung

Im Gegensatz zu diesen ‚groben' Integralnormen liefert die Bildung der lokalen Integralnorm zur RIEMANN-DARBOUX-Norm eine ‚geeignete' Integralnorm, die höchstens kleiner ausfällt als alle drei hier angegebenen. Sie ist damit die unter den gegebenen allgemeinen Annahmen (nur endliche Additivität von μ) günstigste: Sie erzeugt den umfassendsten Integralbegriff.

Wir definieren also

$$\|\psi\|'_{R,\ell} := \sup\left\{\|\psi \wedge \varphi\|'_R \,:\, \varphi \in \mathfrak{E}'\right\} \qquad (\psi \in \mathfrak{P})$$

Änderung

und bezeichnen dies als *„(verallgemeinerte) lokale* RIEMANN-DARBOUX-*Norm"*. Es gilt

$$\|\ \|'_{R,\ell} \leq \|\ \|'_R;$$

dazu ist dies die kleinste Integralnorm auf $\mathfrak{P}$, die für $\mathfrak{E}'$-majorisierbare Funktionen mit der RIEMANN-DARBOUX-Norm übereinstimmt. Daher hat man insbesondere

$$\|\varphi\|'_{R,\ell} = \sigma(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathfrak{E}').$$

$\|\ \|'_{R,\ell}$ ist natürlich ebenfalls homogen. Wie einleitend schon gesagt, gilt hier stets (ohne zusätzliche Annahmen, wie sie bei der RIEMANN-DARBOUX-Norm notwendig waren,)

$$\|\ \|'_{R,\ell} \leq \|\ \|'_S \ \left(\leq \|\ \|'_V\right).$$

Dazu überlegt man, daß für ψ aus $\mathfrak{P}$ und φ aus $\mathfrak{E}'$ abgeschätzt werden kann

$$\|\psi \wedge \varphi\|'_R \leq \sigma(\chi_{\operatorname{Tr}_\varphi}) \cdot \sup\left\{(\psi \wedge \varphi)(x) : x \in \mathfrak{R}\right\} \leq \|\psi\|'_S.$$

Die zu den angegebenen vier ‚geeigneten' Integralnormen $\|\ \|'_V$, $\|\ \|'_S$, $\|\ \|'_R$, $\|\ \|'_{R,\ell}$ gehörenden Räume integrierbarer Funktionen und Integralerweiterungen bezeichnen wir der Reihe nach mit

$$(\mathfrak{I}_V, i_V), \quad (\mathfrak{I}_S, i_S), \quad (\mathfrak{I}_R, i_R), \quad (\mathfrak{I}_{R,\ell}, i_{R,\ell}).$$

Kapitel 9

Die beiden ersten Integralbegriffe stellen *verallgemeinerte* (STIELTJES)-*Integrale von Regelfunktionen* dar, die beiden anderen können als *verallgemeinertes* RIEMANN-STIELTJES-*Integral* und *verallgemeinertes uneigentliches* RIEMANN-STIELTJES-*Integral* angesehen werden. Die oben erhaltenen Abschätzungen ergeben nach dem Vergleichsprinzip:

1. i_S ist stets eine Fortsetzung von i_V.

2. $i_{R,\ell}$ setzt in jedem Falle alle drei anderen — i_R, i_S, i_V — fort.

3. i_R ist jedenfalls dann Fortsetzung von i_S (und damit von i_V), wenn $\mathfrak{R} \in R(\mathbb{S})$ und $0 < s \leq \infty$.

9.4 Wichtige Spezialfälle

Im folgenden betrachten wir die Einordnung einiger wichtiger Spezialfälle, in denen im wesentlichen nur *ein* normierter Vektorraum eine Rolle spielt. Diesen wählen wir der Einfachheit halber wieder sowohl als nicht-trivial (nicht Nullraum) als auch als BANACH-Raum. Die erste Forderung vermeidet die Erwähnung trivialer Ausnahmen. Die Annahme der Vollständigkeit ist im dritten der anschließend aufgezählten Fälle nicht notwendig: $\mathfrak{B}'$ und $\mathbb{K}$ sind stets vollständig. Hier wie auch allgemein ist jedoch, wie schon erwähnt (Vervollständigung), die Forderung der Vollständigkeit keine wesentliche Einschränkung.

> Im folgenden seien also stets $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge, $\mathbb{S}$ ein Prä-Ring von Teilmengen von $\mathfrak{R}$, $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und $\mathfrak{B}$ ein nicht-trivialer BANACH-Raum über $\mathbb{K}$. Mit $\mathfrak{B}'$ bezeichnen wir wie üblich den topologischen Dualraum von $\mathfrak{B}$ (vgl. Übungsaufgabe (1.16.2) des Buches).

1. Integration $\mathfrak{B}$-wertiger Funktionen bezüglich $\mathbb{K}$-wertiger Inhalte

Offenbar kann $\mathbb{K}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels Identifizierung mit den skalaren Vielfachen der identischen Abbildung normgleich in die Algebra der linearen Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in sich eingebettet werden. So sind mit $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}_2 := \mathfrak{B}$ Integrale $\mathfrak{B}$-wertiger Funktionen bezüglich skalarer Inhalte selbstverständlich mit unseren allgemeinen Annahmen erfaßt. ausführen!

2. Integration $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen bezüglich $\mathfrak{B}$-wertiger Inhalte

Hier geht man davon aus, daß $\mathfrak{B}$ und der normierte Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{K}$ in $\mathfrak{B}$ in naheliegender ‚kanonischer' Weise identifiziert werden können. So sind mit $\mathfrak{B}_1 := \mathbb{K}$ und $\mathfrak{B}_2 := \mathfrak{B}$ Integrale skalarer Funktionen bezüglich .$\mathfrak{B}$-wertiger Inhalte in unserem allgemeinen Rahmen enthalten. ausführen!

3. Integration $\mathfrak{B}'$-wertiger Funktionen bezüglich $\mathfrak{B}$-wertiger Inhalte

Hierzu ist die Feststellung wesentlich, daß sich $\mathfrak{B}$ normisomorph in ‚kanonischer' Weise in den Raum der linearen Abbildungen von $\mathfrak{B}'$ in $\mathbb{K}$ einbetten läßt: Man ordnet b aus $\mathfrak{B}$ die Abbildung zu, die jedem A aus $\mathfrak{B}'$ den Wert Ab zuordnet. Dies ist allerdings allgemein durchaus nicht trivial, sondern ausführen!

Kapitel 9

benötigt zumindest eine spezielle Fassung des bekannten Satzes von HAHN-BANACH aus den Grundlagen der Funktionalanalysis. Mit dieser Bemerkung sind dann Integrale der genannten Art mit $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_2 := \mathbb{K}$ mit unseren allgemeinen Überlegungen erfaßt.

Bemerkung: Der umgekehrte Fall der *Integration $\mathfrak{B}$-wertiger Funktionen bezüglich $\mathfrak{B}'$-wertiger Inhalte* bedarf keiner speziellen Erwähnung: Er ist mit $\mathfrak{B}_1 : = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 := \mathbb{K}$ direkt gegeben.

9.5 Eine weitere ‚geeignete' Integralnorm auf $\mathfrak{E}'$

Oben haben wir bereits eine Abschätzung für σ mit Hilfe der Totalvariation angegeben. Setzt man jetzt voraus, daß die *Totalvariation* auf $\mathbb{S}$ *endlich* ist, so ist diese klassischer Inhalt auf $\mathbb{S}$ (vgl. S. 104), und die Abschätzung kann mit Hilfe des zugehörigen Integrals in der Form

$$\sigma(\varphi) \leq i_{|\mu|}(\varphi)$$

geschrieben werden. Natürlich kann man in diesem Falle auch die rechte Seite an Stelle von $\sigma(\varphi)$ verwenden, um so eine Integralnorm zunächst auf $\mathfrak{E}'$ zu erhalten, die dann später in der oben für σ geschilderten Weise zu einem verallgemeinerten RIEMANN-STIELTJES-Integral führt. Natürlich erhält man damit aufgrund der gegebenen Ungleichung höchstens größere Integralnormen und so i. a. weniger integrierbare Funktionen. Vor allem ist aber die Forderung endlicher Totalvariation recht einschränkend; sie zieht insbesondere nach sich, daß die Werte des Inhalts *beschränkte* lineare Abbildungen sein müssen. Unsere Darstellung eines verallgemeinerten (uneigentlichen) RIEMANN-STIELTJES-Integrals ist also einerseits vom Ansatz her umfassender und andererseits auch im Falle der Vergleichbarkeit günstiger.

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang natürlich der Fall, daß die *Totalvariation* nicht nur *endlich*, sondern auch *Maß* ist. Dann kann zur Totalvariation die LEBESGUE-Norm auf $\mathfrak{P}$ als ‚geeignete' Integralnorm gebildet werden. Man erhält so ein verallgemeinertes LEBESGUE-STIELTJES-Integral. Hierzu zeigen wir im nächsten Abschnitt, daß man auch in dieser Richtung mit umfassenderem Ansatz günstigere Resultate erzielen kann.

Wir schließen unsere Überlegungen zu diesen Aspekten ab mit der Feststellung, daß in einfachen Spezialfällen natürlich in der anfangs notierten Ungleichung ‚=' steht. Wie oben sei durchweg angenommen, daß die *Totalvariation* auf $\mathbb{S}$ *endlich* ist. Der Leser wird dann als Übungsaufgabe (9.3.1) (des Buches) leicht zeigen können: *Es gilt*

$$\sigma(\varphi) = i_{|\mu|}(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathfrak{E}')$$

in den beiden Spezialfällen 1. und 3. des vorangehenden Abschnitts. Natürlich sind in *1.* insbesondere Integrale bezüglich klassischer Inhalte enthalten.

9.6 Die verallgemeinerte Lebesgue-Norm

Wie schon oben angekündigt, soll nunmehr unter möglichst schwachen Annahmen der Weg zu einem verallgemeinerten LEBESGUE-STIELTJES-Integral dargestellt werden. Wie im klassischen Fall wird hierzu eine zusätzliche Voraussetzung über den Inhalt in Richtung abzählbarer Additivität wesentlich sein.

Natürlich wird man wieder von der eben schon betrachteten ‚Abschätzungsfunktion'

$$\sigma\colon \mathfrak{E}' \longrightarrow [0, \infty]$$

ausgehen. In jedem Fall kann man dann, wie wir schon im Spezialfall sahen, mit

$$\|\psi\|'_L = \inf\Big\{\sup_n \sigma(\varphi_n) : \mathfrak{E}' \ni \varphi_n \uparrow\geq \psi\Big\} \qquad (\psi \in \mathfrak{P})$$

eine *homogene starke Integralnorm* definieren. Es mag genügen, den *Beweis* für die σ-Subadditivität hier noch einmal aufzuschreiben. Man hat dazu auszugehen von

$$\psi \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu$$

für Funktionen aus $\mathfrak{P}$ und kann sich auf den nicht-trivialen Fall

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\psi_\nu\|'_L < \infty$$

beschränken. Man wählt nun ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem ν nach Definition eine Folge $(\varphi_{\nu,n})$ aus $\mathfrak{E}'$ mit

$$\varphi_{\nu,n} \uparrow\geq \psi_\nu\,, \quad \sigma(\varphi_{\nu,n}) \leq \|\psi_\nu\|'_L + \frac{\varepsilon}{2^\nu}\,.$$

Damit bildet man

$$\varphi_n := \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{\nu,n} \in \mathfrak{E}'$$

und bestätigt

$$\varphi_n \uparrow\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu \geq \psi\,,$$

hat also nach Definition

$$\|\psi\|'_L \leq \sup_n \sigma(\varphi_n)\,.$$

Nun kann gemäß Konstruktion und der Subadditivität von σ abgeschätzt werden:

$$\sigma(\varphi_n) \;\le\; \sum_{\nu=1}^{n} \sigma(\varphi_{\nu,\,n}) \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\psi_\nu\|'_L \;+\; \varepsilon\,,$$

was die Behauptung liefert. □

Man bestätigt natürlich (konstante Folge !) sofort

$$(*) \qquad \|\varphi\|'_L \;\le\; \sigma(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathfrak{E}').$$

Im allgemeinen wird nun aber diese Integralnorm nicht ‚geeignet' sein, wie wir dies vom Spezialfall her schon kennen. Wie dort erhält man aber: ausführen!

$\|\;\|'_L$ ist genau dann geeignet, wenn in $(*)$ stets ‚=' steht, d. h. , wenn für σ gilt:

$(\Diamond)$ Hat man φ_n und φ aus $\mathfrak{E}'$ mit $\varphi_n \uparrow\ge \varphi$, so gilt $\sup_n \sigma(\varphi_n) \ge \sigma(\varphi)$.

Der Leser wird sich nun an den Fall klassischer Inhalte erinnern. Dort (Kapitel 2) erwies sich als äquivalent hierzu die Maßeigenschaft des Inhalts. Wie wir sehen werden, läßt sich dies in analoger Form hier nicht übertragen. Wir begnügen uns damit, im folgenden *eine hinreichende Bedingung* anzugeben und diese zu erläutern: Änderung

Auslassung !

. . . .

Sie fordert direkt eine Eigenschaft des zugrundeliegenden Inhalts μ und bedeutet für klassische Inhalte wieder die als notwendig und hinreichend erkannte Maß-Eigenschaft. Für die jetzt allgemeiner betrachteten Inhalte mit Werten in den linearen Abbildungen eines Banach-Raums in einen anderen muß offenbar zunächst ein bestimmter Konvergenzbegriff (Topologie) festgelegt sein, ehe dann diesbezüglich von einer ‚Maß'-Eigenschaft die Rede sein kann. Bemerkenswert ist nun, daß für eine hinreichende Bedingung ein relativ schwacher Konvergenzbegriff ausreicht:

Ist eine Menge A in $\mathbb{S}$ disjunkte Vereinigung der Mengen A_n aus $\mathbb{S}$, so gilt für jedes b aus $\mathfrak{B}_1$

$$\mu(A)\,b \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,b \qquad\qquad (\text{Konvergenz in } \mathfrak{B}_2).$$

Wir bezeichnen einen solchen Inhalt als *„schwaches Maß"*. Man erkennt sofort, daß dies im Falle des klassischen Inhalts genau die Maß-Eigenschaft ist und damit in diesem Spezialfall, wie gesagt, notwendig und hinreichend ist. Auch wird der Leser sofort sehen, daß diese Forderung für eine $\mathfrak{L}$-wertige Funktion auf $\mathbb{S}$ natürlich die Inhalts-Eigenschaft impliziert. ausführen!

Der Beweis, daß diese Bedingung hinreichend dafür ist, daß die Lebesgue-Norm geeignet ist, führen wir im folgenden Abschnitt, in dem wir schwache Maße etwas eingehender betrachten.

Kapitel 9

Auslassung

. . . .

Es sei nun — etwa infolge der genannten hinreichenden Bedingung — die verallgemeinerte Änderung

Lebesgue-*Norm* $\|\;\|'_L$ *geeignet.*

Durch Fortsetzung des elementaren Integrals mit dieser Integralnorm erhalten wir als Raum der integrierbaren Funktionen $\mathfrak{I}_L$ und als Integral i_L das angekündigte *„verallgemeinerte* Lebesgue-Stieltjes-*Integral"*.

Wie im Spezialfall erhält man die Ungleichung

$$\|\;\|'_L \;\le\; \|\;\|'_R\,,$$

woraus sich wieder ergibt:

i_L ist eine Fortsetzung von i_R.

Insbesondere hat man also $\mathfrak{I}_L \supset \mathfrak{I}_R$.

Natürlich kann man zu der Lebesgue-Norm wieder die zugehörige lokale Integralnorm bilden, die ebenfalls homogen, stark und ‚geeignet' ist. Diese ist offenbar höchstens kleiner und damit günstiger sowohl als die Lebesgue-Norm als auch als die lokale Riemann-Darboux-Norm. Diese Norm kann also (, wenn $\|\;\|'_L$ geeignet ist,) als die insgesamt vorteilhafteste angesehen werden. Bezüglich des Vergleichs zur Lebesgue-Norm beschränken wir uns hier auf die Bemerkung, daß man wie oben (Seite 54) leicht erkennt: Beide Normen stimmen jedenfalls dann überein, wenn σ auf $\mathfrak{E}'$ halbadditiv und $\mathfrak{R}$ (bezüglich $\mathbb{S}$) ‚σ-endlich' ist. Andernfalls kann, wie schon für klassische Maße oben betont, für geeignete Funktionen die lokale Riemann-Darboux-Norm kleiner ausfallen als die Lebesgue-Norm.

Bezüglich der Eigenschaften des erhaltenen Lebesgue-Integrals verweisen wir auf die allgemeinen Sätze von Kapitel 8. Änderung

9.7 Schwache Maße

Mit dem Ziel, die oben formulierte Bedingung als hinreichend nachzuweisen, wollen wir im folgenden ‚schwache Maße' etwas eingehender untersuchen. Zweckmäßig notieren wir dazu zunächst einige Bemerkungen über den Begriff des vektorwertigen Maßes, die sich auf Inhalte mit Werten in einem Banach-Raum (man beachte den obigen Hinweis zur Vervollständigung) und den zugehörigen starken Konvergenzbegriff (Norm-Konvergenz) beziehen. Wir gehen also aus von einem Prä-Ring $\mathbb{S}$ von Teilmengen einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und einen Banach-Raum $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

Kapitel 9

$$\varrho\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{B}$$

heißt genau dann *„Maß“*, wenn aus

$$A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$$

für Mengen A und A_n in $\mathbb{S}$ im Sinne der starken Konvergenz stets folgt

$$\varrho(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(A_n)\,.$$

Hieraus folgt leicht $\varrho(\emptyset) = 0$ und damit die Feststellung, daß auch in diesem allgemeineren Rahmen jedes Maß selbstverständlich *Inhalt* ist. Unmittelbare einfache Verallgemeinerungen von Übungsaufgaben für den klassischen Fall sind die Beweise für die beiden folgenden Aussagen:

ausführen!

1. Die Fortsetzung eines Maßes zu einem Inhalt auf $R(\mathbb{S})$ ist wieder Maß.

ausführen!

2. Für einen $\mathfrak{B}$-wertigen Inhalt ϱ auf $R(\mathbb{S})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- *(a) ϱ ist ein Maß,*
- *(b) ϱ ist aufsteigend stetig,*
- *(c) ϱ ist absteigend stetig,*
- *(d) ϱ ist bei $\emptyset$ absteigend stetig.*

Nach dieser Vorbereitung kommen wir wieder zu den Grundannahmen dieses Kapitels:

> $\mathbb{S}$ sei Prä-Ring von Teilmengen einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ seien nicht-triviale Banach-Räume über $\mathbb{K}$.

Betrachtet man dann eine Abbildung

$$\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{L} := \mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)\,,$$

so wird daraus für jedes Element b aus $\mathfrak{B}_1$ eine Abbildung

$$\mu(\,\cdot\,)b\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{B}_2\,,$$

die also jedem A aus $\mathbb{S}$ den Wert $\mu(A)b$ aus $\mathfrak{B}_2$ zuordnet. Offenbar ist nun genau dann μ *„schwaches Maß“*, wenn alle diese Abbildungen nach $\mathfrak{B}_2$ im obigen Sinne Maße sind. Im folgenden sei nun

$$\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{L} \quad \text{ein schwaches Maß}\,.$$

Für den Nachweis, daß unsere obige Bedingung hinreichend ist, d. h., daß unter dieser Annahme die angegebene verallgemeinerte Lebesgue-Norm geeignet ist, ist nun nicht mehr als eine kleinere vorbereitende Überlegung notwendig:

Kapitel 9

Es seien h aus $\mathfrak{E}$, $0 < \varepsilon < 1$ und φ_n aus $\mathfrak{E}'$ mit $\varphi_n \uparrow\geq |h|$. Dann existieren h_n aus $\mathfrak{E}$ mit $|h_n| \leq \varphi_n$ und $i(h_n) \longrightarrow (1-\varepsilon)\,i(h)$.

Zum *Beweis* betrachtet man zweckmäßig die Mengen

$$M_n := \bigl\{x \in \mathfrak{R} : \varphi_n(x) < (1-\varepsilon)\,|h(x)|\bigr\} \in R(\mathbb{S})\,.$$

Nach Voraussetzung gilt $M_n \downarrow \emptyset$. Man bildet

$$h_n := (1-\varepsilon)\,\chi_{\widetilde{M_n}} h \in \mathfrak{E}$$

und hat offenbar zunächst, wie gewünscht, $|h_n| \leq \varphi_n$. Mit einer Darstellung

$$h = \sum_{\kappa=1}^{k} \chi_{A_\kappa} a_\kappa \qquad \bigl(A_\kappa \in \mathbb{S},\ a_\kappa \in \mathfrak{B}_1\bigr)$$

wird

$$h_n = \sum_{\kappa=1}^{k} \chi_{A_\kappa \setminus M_n}(1-\varepsilon)\,a_\kappa\,.$$

Aus $A_\kappa \setminus M_n \uparrow A_\kappa$ folgt jetzt aufgrund der Annahme, daß μ ein schwaches Maß ist,

$$\mu(A_\kappa \setminus M_n)(1-\varepsilon)a_\kappa \longrightarrow \mu(A_\kappa)(1-\varepsilon)a_\kappa$$

und so schließlich auch $i(h_n) \longrightarrow (1-\varepsilon)i(h)$. □

Diese Hilfsüberlegung ergibt nun rasch die Eigenschaft

($\diamondsuit$) *Hat man φ_n und φ aus $\mathfrak{E}'$ mit $\varphi_n \uparrow\geq \varphi$, so gilt $\sigma(\varphi_n) \uparrow\geq \sigma(\varphi)$,*

die wir oben als äquivalent zu ‚geeignet‘ notiert hatten.

Zum *Beweis* wählt man ein h aus $\mathfrak{E}$ mit $|h| \leq \varphi$ und $0 < \varepsilon < 1$. Dazu bildet man h_n aus $\mathfrak{E}$ wie eben. Nach Definition von σ ergibt

$$\sigma(\varphi_n) \geq |i(h_n)| \longrightarrow (1-\varepsilon)|i(h)|$$

zunächst

$$\sup_n \sigma(\varphi_n) \geq (1-\varepsilon)|i(h)|\,.$$

Hier kann man dann rechts zum Supremum bezüglich der zulässigen h und ε übergehen und erhält wieder mit der Definition von σ die Behauptung. □

9.8 Schwache Maße und Totalvariation

Im folgenden soll zunächst die als wesentlich erkannte Eigenschaft eines Inhalts, schwaches Maß zu sein, etwas eingehender betrachtet werden. Wir zeigen dazu als erstes eine bemerkenswerte Folgerung für die Totalvariation:

Kapitel 9

Ist $\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ *ein schwaches Maß, so ist die Totalvariation* $|\mu|\colon \mathbb{S} \longrightarrow [0, \infty]$ σ*-additiv.*

Änderung

Zum *Beweis* kann — wie schon zu Seite 104 ausgeführt — $\mathbb{S}$ als Ring angenommen werden. Sei dann also

$$S = \biguplus_{\kappa=1}^{\infty} S_\kappa$$

ausführen!

für Mengen in $\mathbb{S}$. Dann gilt nach Seite 104

$$|\mu|(S) \geq \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\mu|(S_\kappa)\,.$$

Es ist also nur noch die andere Ungleichung zu zeigen, d. h. daß $|\mu|$ ein äußeres Maß ist. Zur Abschätzung der Totalvariation von S geht man natürlich aus von einer endlichen Zerlegung

$$S = \biguplus_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

in Mengen von $\mathbb{S}$. Nun ist für jedes ν

$$A_\nu = \biguplus_{\kappa=1}^{\infty} (A_\nu \cap S_\kappa)$$

und damit für jedes b aus $\mathfrak{B}_1$ nach Voraussetzung

$$\mu(A_\nu)\,b = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu(A_\nu \cap S_\kappa)\,b\,.$$

Man schätzt jetzt mit der Norm in $\mathfrak{B}_2$ und zunächst rechts mit der Abbildungsnorm ab:

$$|\mu(A_\nu)\,b| \leq \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\mu(A_\nu \cap S_\kappa)|\right) \cdot |b|\,.$$

Nach Definition der Abbildungsnorm hat man also

$$|\mu(A_\nu)| \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\mu(A_\nu \cap S_\kappa)|\,.$$

Durch Summation über ν folgt daraus zusammen mit der Definition von $|\mu|$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mu(A_\nu)| \leq \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\mu(A_\nu \cap S_\kappa)| \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n} \cdots \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\mu|(S_\kappa)\,.$$

Kapitel 9

Schließlich bildet man natürlich links das Supremum über alle möglichen Zerlegungen von S und hat die Behauptung. $\square$

In diesem Zusammenhang erkennt man fast unmittelbar:

Ist die Totalvariation $|\mu|$ *ein Maß, also* σ*-additiv und* endlich, *so ist der Inhalt* μ *selbst ein Maß (mit Werten in dem* Banach*-Raum der beschränkten linearen Abbildungen von* $\mathfrak{B}_1$ *nach* $\mathfrak{B}_2$*).*

Zum *Beweis* kann man sich wieder auf $\mathbb{S}$ als Ring beschränken und benutzt dann die Charakterisierung der σ-Additivität durch die absteigende Stetigkeit bei $\emptyset$ zusammen mit der Abschätzung der Abbildungsnorm der Werte von μ durch die entsprechenden Werte der Totalvariation. $\square$

Wir formulieren hier ausdrücklich die fast triviale Feststellung:

Ein Maß (im eben beschriebenen Sinne) ist stets schwaches Maß.

Hierzu dürfen wir auf Übungsaufgabe (9.5.1) (des Buches) verweisen, in der gezeigt werden soll, daß selbst bei Inhalten mit Werten in den beschränkten linearen Abbildungen die Umkehrung nicht gilt.

Bemerkenswert ist nun aber die einfache Folgerung aus den beiden ersten bewiesenen Aussagen:

Ist die Totalvariation auf $\mathbb{S}$ *endlich-wertig, so ist ein schwaches Maß sogar (im obigen Sinne) Maß.*

9.9 Inhalte und schwache Maße auf Intervallen

Im folgenden nehmen wir speziell an:

> Es seien $\mathfrak{R} := \mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$ der Prä-Ring der halboffenen Intervalle $[\alpha, \beta[$ mit α und β aus $\mathbb{R}$ und $\alpha \leq \beta$.

Gegenüber dem klassischen Spezialfall werden jedoch weiter allgemein wie oben zwei Banach-Räume und der zugehörige Raum $\mathfrak{L}$ zugrundegelegt. Es sei

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{L}$$

eine beliebige Funktion. Dann liefert offenbar

$$\mu\big([\alpha, \beta[\big) := g(\beta) - g(\alpha)$$

stets einen *Inhalt* $\mu =: \mu_g$ auf $\mathbb{S}$.

ausführen!

So erhält man *alle* $\mathfrak{L}$-wertigen Inhalte auf $\mathbb{S}$; denn für einen Inhalt ϱ definiert

ausführen!

Kapitel 9

$$h(x) := \begin{cases} \varrho([0,\, x[\,) & (x \geq 0), \\ -\varrho([x,\, 0[\,) & (x < 0) \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte Funktion h mit

$$\varrho([\alpha,\, \beta[\,) = h(\beta) - h(\alpha)\,, \quad h(0) = 0\,.$$

Wir brauchen wohl kaum noch einmal zu sagen, daß im Falle einer reellwertigen Funktion g genau dann ein *klassischer* Inhalt entsteht, wenn g isoton ist.

Offenbar erhält man jetzt für die Intervalle die einfache Darstellung und die den klassischen Spezialfall verallgemeinernde Bezeichnung (für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$)

$$\begin{aligned} |\mu|([a,\, b[) &= \sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\right\} \\ &=: \int_a^b |dg|\,, \end{aligned}$$

wobei $\sup\emptyset := 0$. Der Leser möge sich hierbei auch an die Begriffe ‚Bogenlänge' und ‚rektifizierbar' aus A II erinnern. Änderung

Zur näheren Untersuchung dieses Spezialfalls stellen wir zunächst das einfache ‚klassische' Resultat bereit:

Ist h eine reellwertige isotone Funktion auf $\mathbb{R}$, so ist der hierdurch auf dem betrachteten Intervall-Prä-Ring gegebene Inhalt $\varrho := \mu_h$ σ-additiv, also Maß, genau dann, wenn h linksstetig ist.

Zum *Beweis* betrachtet man für die eine Richtung ohne Einschränkung eine Folge $\beta_n \uparrow \beta$. Man hat also $[\beta_n, \beta[\, \downarrow \emptyset$ und daher, falls ϱ ein Maß ist,

$$h(\beta) - h(\beta_n) = \varrho([\beta_n, \beta[) \downarrow 0\,.$$

Für die andere Richtung stützt man sich auf die Übungsaufgabe 2.4.4 des Buches (siehe E 9) und weist die Regularität von ϱ nach: Zu nicht-trivialem $[\alpha,\, \beta[$ schließt man dazu mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ ausführen!

$$K := [\alpha,\, \beta - \delta] \subset [\alpha,\, \beta[\, \subset\,]\alpha - \delta,\, \beta[=: O$$

ein, erhält

$$O \setminus K \subset [\beta - \delta,\, \beta[\;\uplus\; [\alpha - \delta,\, \alpha[$$

und kann hier aufgrund der Linksstetigkeit den Inhalt der rechten Seite beliebig klein erreichen. □

Weiter notieren wir:

Kapitel 9

Ist die Funktion g linksstetig, so ist die ($[0, \infty]$-wertige) Totalvariation $|\mu|$ zum zugehörigen Inhalt μ linksstetig in dem Sinne, daß

$$a < b_n \uparrow b \implies |\mu|([a,\, b_n[) \uparrow |\mu|([a,\, b[)\,,$$

und damit σ-additiv.

Den *Beweis* dieser Aussage führe ich — aus Zeitgründen — nicht mehr aus. Änderung

Unter der Voraussetzung, daß die

Totalvariation $|\mu|$ auf $\mathbb{S}$ endlich

und h eine reellwertige isotone Funktion mit

$$|\mu|([a,\, b[) = h(b) - h(a)$$

ist, ergeben unsere Überlegungen zusammenfassend die *Äquivalenz* der fünf Aussagen

(a) *g ist linksstetig,*

(b) *μ ist Maß,*

(c) *μ ist schwaches Maß,*

(d) *$|\mu|$ ist Maß,*

(e) *h ist linksstetig.*

9.10 ‚Orthogonale' Inhalte und Maße

Ein für Theorie und Anwendungen interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn man Inhalte mit Werten in einem Hilbert-Raum betrachtet und fordert, daß die Werte des Inhalts für zueinander disjunkte Mengen orthogonal sind. Wir nehmen also an:

$\mathbb{S}$ sei ein Prä-Ring von Teilmengen einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$,

$\mathfrak{H}$ ein nicht-trivialer Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$.

Wir bezeichnen das zugehörige Skalarprodukt mit $(\cdot\,,\,\cdot)$ und die daraus resultierende Norm mit $|\;|$. Weiter sei nun

$\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{H}$ ein Inhalt mit $(\mu(A), \mu(B)) = 0$ für disjunkte Mengen A, B aus $\mathbb{S}$.

Wir bezeichnen ein solches μ als *„orthogonalen Inhalt"*. Zu μ wird man

$$v(A) := (\mu(A),\, \mu(A)) = |\mu(A)|^2$$

Kapitel 9

bilden und erkennt:

(a) $v\colon \mathbb{S} \longrightarrow [0,\infty[$ *ist ein (klassischer) Inhalt.*

(b) *μ ist ein ($\mathfrak{H}$-wertiges) Maß genau dann, wenn v ein (klassisches) Maß ist.*

Zum *Beweis* von (a) bestätigt man die Additivität sofort aufgrund der Orthogonalitäts-Eigenschaft (‚Pythagoras'). Für (b) wird die σ-Additivität von v aus der von μ in gleicher Weise (Stetigkeit des Skalarprodukts!) erhalten. Die andere Richtung reduziert man, wie gewohnt, auf den Fall eines Ringes $\mathbb{S}$ und auf die absteigende Stetigkeit bei $\emptyset$. □

ausführen!

Zwischen den Bildungen für μ und für v bestehen aufgrund der Orthogonalität sehr enge Beziehungen. Man hat so:

(c) *Für zwei $\mathbb{K}$-wertige (bezüglich $\mathbb{S}$) einfache Funktionen f, g gilt*

$$\big(i_\mu(f),\, i_\mu(g)\big) \;=\; i_v(f\cdot\overline{g})\,,$$

(d) *für φ aus $\mathfrak{E}'$ wird*

$$\sigma_\mu(\varphi) \;=\; \Big(i_v(\varphi^2)\Big)^{\frac{1}{2}}\,,$$

(e) *σ_μ ist auf $\mathfrak{E}'$ endlich und halbadditiv.*

Beweis: Für (c) verwendet man natürlich eine gemeinsame Darstellung mit disjunkten Mengen aus $\mathbb{S}$. Man setzt diese in die linke Seite ein, multipliziert aus, verwendet wieder die Orthogonalität und hat so sofort die Darstellung rechts. (d) folgt hieraus: Für eine einfache Funktion f mit $|f| \le \varphi$ sieht man zunächst

ausführen!

$$|i_\mu(f)| \;\le\; \Big(i_v(\varphi^2)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

und hat dabei natürlich ‚=' mit $f := \varphi$. Für (e) stützt man sich auf die entsprechende einfache Überlegung aus Kapitel 6 bezüglich der Halbadditivität der p-Normen, die wir noch nachtragen werden. □

Änderung

Im folgenden nehmen wir an:

$\mu\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathfrak{H}$ sei ein orthogonales Maß.

Hierzu erhält man aus dem Vorangehenden fast unmittelbar:

1. *Die* Lebesgue-*Norm zu μ stimmt überein mit der* 2-*Norm zu v;*
2. *die bezüglich der* Lebesgue-*Norm zu μ integrierbaren Funktionen sind genau die Funktionen aus dem Raum $\mathfrak{L}_2$ zu v;*
3. *auch für je zwei derartige Funktionen f, g gilt*

$$\big(\overline{\imath_\mu}(f),\, \overline{\imath_\mu}(g)\big) \;=\; \overline{\imath_v}(f\cdot\overline{g})\,.$$

Die *Beweise* ergeben sich unmittelbar aus den Überlegungen des noch auszuführenden Kapitels 6 und den entsprechenden Feststellungen für den ele-

Kapitel 9

Änderung

ausführen!

mentaren Bereich — einschließlich der Integrierbarkeit des Produkts in der letzten Formel. □

Wie wir oben feststellten, ist die Lebesgue-Norm zu μ auf $\mathfrak{E}'$ endlich und halbadditiv (und natürlich stark). So gelten *für das* Lebesgue-*Integral* zu einem orthogonalen Maß *alle Konvergenzsätze* des Kapitels 8 einschließlich — was wir aber in dieser Vorlesung nicht vom Spezialfall her ‚übertragen' haben — des Norm-Hüllen- und des Norm-Limes-Satzes.

Änderung

Wir schließen mit einem Literatur-Hinweis: Theorie und Anwendungen der betrachteten orthogonalen Maße, die dort als *‚c.a.o.s.-Maße'* bezeichnet werden, wobei die Abkürzungen für ‚countably additive orthogonally scattered' stehen, findet man vor allem ausführlich bei P. Masani (auf über 50 Seiten). Der Leser wird bei flüchtiger Durchsicht leicht erkennen, wieviel natürlicher und kürzer der von uns dargestellte Zugang ist.

Kapitel 9