6. $\mathcal{L}_p$ – Räume   ⟨allgemeiner als im Buch dargestellt⟩

Obwohl viele Teilaussagen auch unter schwächeren Voraussetzungen gelten, machen wir in diesem Kapitel einheitlich die

Ann.: $\mathfrak{R}$ n. l. Menge, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\{0\} \neq \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ $\mathbb{K}$-BRe,
$\mathfrak{S}$ Prä-Ring über $\mathfrak{R}$ und
$\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{L} := \mathfrak{L}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ schwaches Maß

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}_1)$, $\mathcal{E}'$, $i := i_\mu$, σ, $\| \|_L'$, $\mathfrak{I}_L$, i_L, ...
σ sei auf $\mathcal{E}'$ endlich u. halbadditiv.

6.1 Die Integralnormen $\| \|_p'$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Im folgenden seien zunächst
$1 < p < \infty$ u. $q := \frac{p}{p-1}$ $(\rightsquigarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

(6.1.1) Hfs.: Für $a, b \in [0, \infty[$ $\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$

Beweis: $\text{E}\ a, b > 0$: $\log$ (streng) konkav (da Abl. streng antiton):
$\log(ab) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \leq \log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q)$
Da $\log$ streng isoton ist, liefert diese Abschätzung die Beh.. □

Bez. Für $\varphi \in \mathcal{E}'$ $\sigma_p(\varphi) := (\sigma(\varphi^p))^{1/p}$ (dabei: $\varphi^p \in \mathcal{E}'$)

(6.1.2) Für $\varphi, \psi \in \mathcal{E}'$: $\varphi\psi \in \mathcal{E}'$ und $\sigma(\varphi\psi) \leq \sigma_p(\varphi)\,\sigma_q(\psi)$

Beweis: Wir setzen $\varepsilon \begin{cases} = \sigma(\varphi^p), & \text{falls } \sigma(\varphi^p) \neq 0 \\ > 0 & \text{beliebig, sonst} \end{cases}$ und