6.4 Die BANACH-Räume L_p $(1\le p\le\infty)$

$\mathcal{N} := \{f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathcal{S}) : f(x)=0 \text{ f.ü.}\}$ (UR von $\mathcal{F}$)

(a) $f\in\mathcal{N} \Rightarrow \forall p\in[1,\infty]\ f\in\mathcal{L}_p \wedge \|f\|_p=0$

(b) $f\in\mathcal{F}\wedge \|f\|_p=0$ für ein $p\in[1,\infty] \Rightarrow f\in\mathcal{N}$

Def.: Für $f,g\in\mathcal{F}$: $f\sim g :\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ f.ü. $\Leftrightarrow f-g\in\mathcal{N}$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$ mit
$f\sim f_1 \wedge g\sim g_1 \Rightarrow \alpha f+g \sim \alpha f_1+g_1$ $\quad(\alpha\in\mathbb{K};\ f,f_1,g,g_1\in\mathcal{F})$
(Verträglichkeit mit VR-Struktur; Kongruenzrelation)

Bez.: $\hat f := \{g\in\mathcal{F}: f\sim g\} = f+\mathcal{N}$ $(f\in\mathcal{F})$: „Äquivalenzklasse (zu f)"
(Nebenklasse)

Durch $\alpha\hat f+\hat g := \widehat{\alpha f+g}$ $(\alpha\in\mathbb{K};\ f,g\in\mathcal{F})$ wird der
„Quotientenraum" $L_p := L_p(\dots) := \mathcal{L}_p(\dots)/_{\mathcal{N}} := \{\hat f : f\in\mathcal{L}_p(\,)\}$
zum $\mathbb{K}$-VR $(1\le p\le\infty)$. Die „kanonische Abbildung"
$\omega: \mathcal{L}_p\ni f\mapsto \hat f\in L_p$ ist linear und surjektiv.
Für $f,g\in\mathcal{F}$ mit $f\sim g$ ist $\|f\|_p=\|g\|_p$ $(1\le p\le\infty)$.
So wird durch $\|\hat f\|_p := \|f\|_p$ $(f\in\mathcal{L}_p)$ eine Norm auf L_p
definiert. Aus (6.2.3) und (6.3.7) (Vollständigkeit der Räume $\mathcal{L}_p$)
folgt: L_p $(=(L_p,\dots,\|\ \|_p))$ ist ein $\mathbb{K}$-BR $(1\le p\le\infty)$.

(Die induzierten VR-Operationen und die induzierte Norm unterscheiden wir also nicht in der Notierung von den VR-Operationen bzw. der Halbnorm in $\mathcal{L}_p$.)

Für die restlichen Überlegungen dieses Kapitels sei
μ klassisch (also $\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty[$ Maß) mit $\mu\ne 0$.

Anm.: $\{0\}\ne(\mathcal{H},\langle\,,\,\rangle)$ sei ein $\mathbb{K}$-HR (Hilbertraum)