Für $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ sei $(fg)(x) := \langle f(x), g(x) \rangle$ $(x \in \mathcal{R})$.
Nach (6.3.10.b) (HÖLDER-Ungleichung) liegt für $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ die Abbildung fg in $\mathcal{L}_1(\mathbb{K})$, und $i_{\mathbb{K}}(fg)$ ist nur abhängig von den Klassen $\hat{f}, \hat{g}$. Damit ist dann

$$[\ ,\ ] : L_2(\mathcal{H}) \times L_2(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{wohldefiniert.}$$
$$(\hat{f}, \hat{g}) \longmapsto i_{\mathbb{K}}(fg)$$

Satz: $(L_2(\mathcal{H}), [\ ,\ ])$ ist ein $\mathbb{K}$-HR mit
$[\hat{f}, \hat{f}] = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \quad (f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}))$.

Beweis: $[\ ,\ ]$ ist sesquilinear, da $\langle\ ,\ \rangle$ sesquilinear und $i_{\mathbb{K}}$ linear ist. $[\ ,\ ]$ ist hermitesch, da $\langle\ ,\ \rangle$ hermitesch ist und für $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{K})$ gilt (...) $i_{\mathbb{K}}(\bar{h}) = \overline{i_{\mathbb{K}}(h)}$.
$(ff)(x) = \langle f(x), f(x) \rangle = |f(x)|^2 = |f|^2(x) \quad (x \in \mathcal{R})$ zeigt
$[\hat{f}, \hat{f}] = i_{\mathbb{K}}(ff) = i_{\mathbb{K}}(|f|^2) = \| \, |f|^2 \, \|_1 = \|f\|_2^2 \geq 0.$
Nach S. 120 ist $(L_2(\mathcal{H}), \| \ \|_2)$ ein $\mathbb{K}$-BR (n Bsp.) □

„OH MEINE GÜTE! WAS DIE KINDER HEUTZUTAGE ALLES IN DER SCHULE LERNEN MÜSSEN! DIE ARMEN KLEINEN GEHIRNCHEN! MIR WIRD GANZ ANDERS!"
DONALD DUCK

Erholsame vorlesungsfreie Zeit, viel Freude und Erfolg beim weiteren Studium (und auch anderswo) wünscht Ihnen

Dr. L. Hoffmann