$\curvearrowright \ (\sup_n \sigma_p(\varphi_n))^p = \sup_n \sigma(\varphi_n^p) \geq \|\varphi^p\|' \curvearrowright$

$\sup_n \sigma_p(\varphi_n) \geq (\|\varphi^p\|')^{1/p}$; „$\geq$"

$\mathcal{E}' \ni \chi_n \uparrow \geq \varphi^p \curvearrowright \mathcal{E}' \ni \chi_n^{1/p} \uparrow \geq \varphi \curvearrowright$

$\sup_n \sigma(\chi_n)^{1/p} = \sup_n \sigma_p(\chi_n^{1/p}) \geq \|\varphi\|_p' \curvearrowright$

$\sup_n \sigma(\chi_n) \geq (\|\varphi\|_p')^p \curvearrowright (\|\varphi\|_p')^p \leq \|\varphi^p\|'$; „$\leq$".

Für $y \in \mathcal{E}'$ hat man nun:

$\|y\|_p' = (\|y^p\|')^{1/p} \underset{9.7}{=} (\sigma(y^p))^{1/p} = \sigma_p(y)$.

1. Zeile: wie üblich (vgl. S. 109 f) □

Anmerkung: Für $A \subset \mathbb{R}$ ist $(\chi_A)^p = \chi_A$, daher liefern – nach (6.1.4) – $\| \ \|_p$ u. $\| \ \|'$ die gleichen Nullmengen und damit auch gleiche Nullfunktionen ($\leadsto$ „f.ü.").

Wir bezeichnen noch für $\varphi \in \mathcal{F}$:

$$\boxed{\|\varphi\|_\infty' := \inf\{k \in [0,\infty] : \varphi(x) \leq k \text{ f.ü.}\}}$$

(„wesentliches Supremum")

(6.1.5) Bem.:
a) $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty'$ f.ü. (---)
b) $\| \ \|_\infty'$ ist eine homogene starke Integralnorm.
c) $\| \ \|_\infty'$ liefert gleiche Nullfunktionen (und damit Nullmengen) wie $\| \ \|'$.

Beweis: a): OE $\|\varphi\|_\infty' < \infty$: $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > \|\varphi\|_\infty' + \frac{1}{n}\}$ ist ($\| \ \|'$-) NM ($n \in \mathbb{N}$), daher ist auch

$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > \|\varphi\|_\infty'\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > \|\varphi\|_\infty' + \frac{1}{n}\}$ NM.

b): $\varphi \leq \sum_{\nu=1}^\infty \varphi_\nu \underset{a)}{\curvearrowright} \varphi(x) \leq \sum_{\nu=1}^\infty \|\varphi_\nu\|_\infty'$ f.ü. $\curvearrowright$

$\|\varphi\|_\infty' \leq \sum_{\nu=1}^\infty \|\varphi_\nu\|_\infty'$ (Rest: ✓) □

c): φ $\| \ \|'$-NF $\curvearrowleft$ $\varphi(x) = 0$ f.ü. $\curvearrowleft$ $\|\varphi\|_\infty' = 0$: ($\varphi \in \mathcal{F}$)