Wir bezeichnen – wie üblich – für $1 \leq p \leq \infty$

$$q := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } p = \infty \\ p/p-1 & , \quad " \quad 1 < p < \infty \\ \infty & , \quad " \quad p = 1 \end{cases}$$

als „konjugiert zu $p$". (Mit $\frac{1}{\infty} := 0$ : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Mit $0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$ erhalten wir:

(6.1.6) HÖLDER – Ungleichung

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Vor.: } 1 \leq p \leq \infty;\ q \text{ konjugiert zu } p;\ \varphi, \psi \in \mathcal{F} \\ \text{Beh.: } \|\varphi\psi\|' \leq \|\varphi\|_p' \, \|\psi\|_q' \end{array}}$$

Beweis: r.S. $= 0 \curvearrowright \|\varphi\|_p' = 0 \vee \|\psi\|_q' = 0 \curvearrowright (\varphi\psi)(x) = 0$ f.ü., also l.S. $= 0$. Es bleibt deswegen der Fall $0 <$ r.S $< \infty$ (mithin $\|\varphi\|_p' < \infty$ u. $\|\psi\|_q' < \infty$). Für $p = 1$ hat man: $(\varphi\psi)(x) \leq \varphi(x)\|\psi\|_\infty'$ f.ü u. somit die Beh. ($p = \infty, q = 1$: ebenso)

Für $1 < p < \infty$ u. $\varepsilon > 0$: Ex. $\varphi_n \in \mathcal{E}', \psi_n \in \mathcal{E}'$ ./.
$\varphi_n \uparrow \geq \varphi$, $\psi_n \uparrow \geq \psi$ u. $\sup_n \sigma_p(\varphi_n) \leq \|\varphi\|_p' + \varepsilon$, $\sup_n \sigma_q(\psi_n) \leq \|\psi\|_q' + \varepsilon$.
Für $\chi_n := \varphi_n\psi_n \in \mathcal{E}'$: $\chi_n \uparrow \geq \varphi\psi$ und

$$\|\varphi\psi\|' \leq \sup_n \sigma(\chi_n) \underset{(6.1.2)}{\leq} \sup_n \sigma_p(\varphi_n)\,\sigma_q(\psi_n) \leq (\|\varphi\|_p' + \varepsilon)(\|\psi\|_q' + \varepsilon) \; \square$$

---

Für $1 \leq p \leq \infty$ haben wir daher gemäß Kapitel 7:

(6.1.7) Erster Konvergenzsatz für $(\mathcal{F}, \|\ \|_p')$

(6.1.8) Vollständigkeit von $(\mathcal{F}, \|\ \|_p')$

(6.1.9) Charakterisierung von Konvergenz bez. $\|\ \|_p'$

Für $1 \leq p < \infty$ und $\mathcal{I}_p' := \overline{\mathcal{E}'}^{\|\ \|_p'}$ zusätzlich:

(6.1.10) Vollständigkeit von $(\mathcal{I}_p', \|\ \|_p')$

(6.1.11) Satz von LEVI II (erste u. zweite Fassung)
($\Sigma$) ($\uparrow$)