(6.1.12) Folgerungen 1, 2, 3 (Seite 88)

(6.1.13) Satz von FATOU

(6.1.4) Satz von LEBESGUE („majorisierte Konvergenz")

6.2 Theorie für BR-wertige Abbildungen

Zusätzlich zu den allg. Ann. sei hier noch | $\{0\} \neq \mathcal{B}$ K-BR

Bez.: | $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$,
$\| \ \|_p := \| \ \|'_p \circ | \ |$ $(: \mathcal{F} \to [0,\infty])$ $(1 \le p \le \infty)$,
$\| \ \| := \| \ \|_1$; für $1 \le p < \infty$:
$\mathcal{L}_p(\mathcal{B}) := \overline{\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}, \mathcal{B})}^{\| \ \|_p}$ (UR von $\mathcal{F}$)
(also $\mathcal{L}_1(\mathcal{B}_1) = \mathfrak{I}_L$)
„f.ü." bedeute $\| \ \|'$-f.ü. (also $\| \ \|'_p$-f.ü. $(1 \le p \le \infty)$)

Für $1 \le p \le \infty$ hat man dann (nach S. 35 mit $i := 0$)

(6.2.1) Satz: $\boxed{\text{Zu } (f_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \text{ mit } \left\| \sum_{\nu=n}^{\infty} |f_\nu| \right\|'_p \to 0 \ (n \to \infty) \text{ ex. } f \in \mathcal{F} \text{ mit } \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = f(x) \text{ f.ü. und } \left\| \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu - f \right\|_p \to 0}$

Die Überlegungen von S. 36 liefern entsprechend:

(6.2.2) Satz
a) $(\mathcal{F}, \| \ \|_p)$ ist vollständig.
b) Für $f, f_n \in \mathcal{F}$:

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \iff \begin{cases} (f_n) \ \| \ \|_p\text{-CF u. ex. } n_1 < n_2 < \cdots \\ f_{n_j}(x) \to f(x) \quad (j \to \infty; \text{ f.ü.}) \end{cases}$$

Für $1 \le p < \infty$ hat man u.a.: