(6.2.3) $(\mathcal{L}_p(\mathcal{B}), \| \, \|_p)$ ist vollständig.

(6.2.4) **Satz von LEVI**

Zu $(f_n) \in \mathcal{L}_p(\mathcal{B})^{\mathbb{N}}$ mit $\sup_n \| \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu| \|_p' < \infty$ ex. $f \in \mathcal{L}_p(\mathcal{B})$ ·/. $\| \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu - f \|_p \to 0$ u. $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = f(x)$ f.ü.

(6.2.5) **Satz von LEBESGUE**

Vor.: $f \in \mathcal{F}$, $(f_n) \in \mathcal{L}_p(\mathcal{B})^{\mathbb{N}}$, $f_n(x) \to f(x)$ f.ü.,
$\varphi \in \bar{\mathcal{F}}$ mit $\|\varphi\|_p' < \infty$ u. $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ f.ü.

Bh.: $f \in \mathcal{L}_p(\mathcal{B})$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$

< nicht eingegangen auf: NHS, NLS u. ... >

6.3 Meßbare Abbildungen

Ann. wie zu 6.2 mit $1 \leq p < \infty$

Bez.: $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{B})$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(\mathcal{B})$, ...

Wir betrachten noch die „meßbaren Abbildungen":

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{B}) := \{ f \in \mathcal{F} : \exists (f_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \; f_n(x) \to f(x) \text{ f.ü.} \}.$$

Def.:

$$\|\varphi\|_0' := \begin{cases} 0, & \text{falls } (\varphi_n) \in \mathcal{E}'^{\mathbb{N}} \text{ ex. mit } \sup \varphi_n \geq \varphi \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\varphi \in \bar{\mathcal{F}})$$

$$\alpha \circledast a := \begin{cases} a, & \text{falls } |a| \leq \alpha \\ \frac{\alpha}{|a|} a, & \text{"} \quad |a| > \alpha \end{cases} \quad a \in \mathcal{B}, \alpha \in [0, \infty]$$

(6.3.1) Bem.: $\| \, \|_0'$ ist eine starke Integralnorm. (Beweis: ✓)

Mit $r(a) := \begin{cases} 0, & a = 0 \\ \frac{1}{|a|} a, & a \neq 0 \end{cases}$ $(a \in \mathcal{B})$

$\alpha \circledast a = (\alpha \wedge |a|) \, r(a)$.