(6.3.2) Bem.: a) $|\alpha \circledast a| = \alpha \wedge |a|$

b) $|\alpha \circledast a - \beta \circledast b| \le \alpha \Delta \beta + 2|a-b|$

c) $|a - \alpha \circledast a| = |a| - \alpha \wedge |a|$

Beweis: a), c): ... b): (langweilige) Übung (vgl. z.B. GÜNZLER, S. 327 f)

Durch $(\varphi \circledast f)(x) := \varphi(x) \circledast f(x)$ $(\dots)$ erhält man

$\circledast : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

(6.3.3) $\mathcal{E}' \circledast \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$: ✓ $\qquad$ ($\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(\mathcal{E})$:)

(6.3.4) Folgerung: $\mathcal{F}'_p \circledast \mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_p$ Beweis: ...

(6.3.5) Satz

a) $\mathfrak{M} = \{f \in \mathcal{F} : \|f\|_\sigma = 0 \wedge \forall \varphi \in \mathcal{E}' \;\; \varphi \circledast f \in \mathcal{L}_p\}$

b) Für $(f_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ u. $f \in \mathcal{F}$ mit $f_n(x) \to f(x)$ f.ü.: $f \in \mathfrak{M}$

Beweis: Wir bez. die r.S. in a) mit $\mathfrak{M}_1$ u. zeigen zunächst:

1) Für $(f_n) \in \mathfrak{M}_1^{\mathbb{N}}$ u. $f \in \mathcal{F}$ mit $f_n(x) \to f(x)$ f.ü.: $f \in \mathfrak{M}_1$

Mit $N := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \not\to f(x)\}$ gilt $|f| \le \sum_{n=1}^{\infty} (|f_n| + \chi_N)$,
also – unter Beachtung von $\|\varphi\|'_p < \infty \curvearrowright \|\varphi\|'_\sigma = 0$ – $\|f\|_\sigma = 0$.
Für $\varphi \in \mathcal{E}'$ ist $\varphi \circledast f_n \in \mathcal{L}_p$, $|\varphi \circledast f_n| \le \varphi$, $\|\varphi\|'_p < \infty$
und – nach (6.3.2.b) – $(\varphi \circledast f_n)(x) \to (\varphi \circledast f)(x)$ f.ü.;
nach (6.2.5) (‚LEBESGUE'): $\varphi \circledast f \in \mathcal{L}_p$.

2) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$: Nach (6.3.3) $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}_1$, also nach 1) Beh.

3) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$: Für $f \in \mathfrak{M}_1$ ist $\|f\|_\sigma = 0$, daher ex. $(\varphi_n) \in \mathcal{E}'^{\mathbb{N}}$
mit $\varphi_n \uparrow \ge |f|$; $g_n := \varphi_n \circledast f \in \mathcal{L}_p$; nach (6.3.2.c)
$g_n(x) \to f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Ex. $(h_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ mit
$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n - g_n\|_p < \infty$, daher (z.B. nach (6.2.1)) ;