$h_n(x) - g_n(x) \to 0$ f.ü. und so $\underline{h_n(x) \to f(x)}$ f.ü. □

Ergänzend notieren wir noch:

(6.3.6) $\boxed{\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{ f \in \mathcal{F} : \|f\|_0 = 0 \wedge \forall \varphi \in \mathcal{I}_p^+ \ \varphi \otimes f \in \mathcal{L}_p \} \\ &= \{ \quad '' \quad : \exists (f_n) \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{N}} \ f_n(x) \to f(x) \text{ f.ü.} \} \end{aligned}}$

Beweis: Für die 1. Gl. ist also – mit der Bez. aus dem Beweis zu (6.3.5) – noch $\underline{\mathcal{M}_1 \subset \text{r.S.}}$ zu zeigen: zu $f \in \mathcal{M}_1$ u. $\varphi \in \mathcal{I}_p^1$ ex. $(\varphi_n) \in \mathcal{E}^{1\mathbb{N}}$ mit $\|\varphi_n \Delta \varphi\|_p^1 \to 0$.

$|\varphi_n \otimes f - \varphi \otimes f| \underset{(6.3.2.b)}{\leq} \varphi_n \Delta \varphi$ liefert $\|\underbrace{\varphi_n \otimes f}_{\in \mathcal{L}_p} - \varphi \otimes f\|_p \to 0$,

also $\varphi \otimes f \in \mathcal{L}_p$. Die 2. Gl. zeigt die Schlußweise unter 3). □

Wir definieren noch

$\mathcal{L}_\infty := \mathcal{L}_\infty(\mathcal{B}) := \{ f \in \mathcal{M} : \|f\|_\infty < \infty \}$ und zeigen

(6.3.7) Bem.: $\underline{(\mathcal{L}_\infty, \| \|_\infty) \text{ ist vollständig.}}$

Beweis: Nach (6.2.2.a) ist nur die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_\infty$ in $(\mathcal{F}, \| \|_\infty)$ zu zeigen: Für $(f_n) \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{N}}$ u. $f \in \mathcal{F}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ gelten: $\underline{\|f\|_\infty < \infty}$ u. (mit (6.1.5.a)) $f_n(x) \to f(x)$ f.ü., also – nach (6.3.5.b) – : $\underline{f \in \mathcal{M}}$. □

Abschließend zeigen wir noch

(6.3.8) Satz $\underline{\text{Für } 1 \leq p \leq \infty \text{ ist } \mathcal{L}_p = \{ f \in \mathcal{M} : \|f\|_p < \infty \}}$

Beweis: E $1 \leq p < \infty$; „$\subset$": Nach (6.1.3) u. (6.1.4) ist $\underline{\| \|_p \text{ endlich auf } \mathcal{L}_p}$. $\underline{\mathcal{L}_p \subset \mathcal{M}}$: z.B. nach (6.2.2.b)

„$\supset$": Ist $f \in \mathcal{M}$ $(= \mathcal{M}_1)$ mit $\|f\|_p < \infty$, dann kann in Pkt. 3) des Beweises zu (6.3.5) der S.v. LEBESGUE ((6.2.5)) angewendet werden (denn $|g_n| \leq |f|$); das liefert $f \in \mathcal{L}_p$. □