Für $1 \leq p < \infty$

sei $a(x) := \begin{cases} |x|^{p-1} \cdot x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (x \in \mathcal{B})$:

(6.3.9) Satz Für $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: $f \in \mathcal{L}_p \Leftrightarrow a \circ f \in \mathcal{L}_1$

(lax: $f \in \mathcal{L}_p \Leftrightarrow |f|^{p-1} \cdot f \in \mathcal{L}_1$)

Beweis: $\Rightarrow$: zu $f \in \mathcal{L}_p$ ex. nach (6.3.8) $(h_k) \in \mathcal{E}(\ldots)^{\mathbb{N}}$ mit $h_k(x) \to f(x)$, f.ü.; dann gelten $(a \circ h_k) \in$ " mit $a \circ h_k(x) \to a \circ f(x)$, f.ü. (da a stetig).

$\| a \circ f \|_1 = \| |f|^p \|_1 = \| f \|_p^p < \infty$. Nach (6.3.8) also $a \circ f \in \mathcal{L}_1$. $\Leftarrow$: entsprechend mit a^{-1} --- $\square$

Sind $\mathcal{B}_3$ und $\mathcal{B}_4$ weitere (n.t.) $\mathbb{K}$-BRe, $M \in [0, \infty[$ und

$\omega: \mathcal{B}_3 \times \mathcal{B}_4 \to \mathcal{B}$ mit

$|\omega(x,y)| \leq M |x| |y|$ für $x \in \mathcal{B}_3$, $y \in \mathcal{B}_4$,

so erhält man aus (6.1.6) die folgende allgemeine Form der HÖLDER-Ungleichung

(6.3.10) Vor.: $1 \leq p \leq \infty$, q konjugiert zu p

Beh.: a) Für $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_3)$ und $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_4)$ gilt

$$\| \omega(f,g) \| \leq M \| f \|_p \| g \|_q$$

b) Ist ω noch stetig, so liegt für $f \in \mathcal{L}_p(\mathcal{B}_3)$ und $g \in \mathcal{L}_q(\mathcal{B}_4)$ die Abbildung $\omega(f,g)$ in $\mathcal{L}_1(\mathcal{B})$.

Der Beweis von a) ist mit (6.1.6) gegeben. Der Beweis von b) folgt dann mit (6.3.8) und der Stetigkeit von ω, wenn man noch beachtet, daß für $f \in \mathcal{E}(\mathcal{B}_3)$, $g \in \mathcal{E}(\mathcal{B}_4)$ — wegen $\omega(0,0) = 0$ — $\omega(f,g)$ in $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ liegt. $\square$