Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1
Sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Zu $f \in \mathcal{L}(V, K)$ sei $f|_U \in \mathcal{L}(U, K)$ das durch $f|_U(u) = f(u)$ für alle $u \in U$ definierte Funktional.

(a) Zeige, dass wenn $f_1|_U, ..., f_n|_U \in \mathcal{L}(U, K)$ linear unabhängig sind, auch $f_1, .., f_n \in \mathcal{L}(V, K)$ linear unabhängig sind.

(b) Zeige, dass wenn $f_1, .., f_n \in \mathcal{L}(V, K)$ den Raum $\mathcal{L}(V, K)$ erzeugen, dann erzeugen $f_1|_U, ..., f_n|_U$ den Raum $\mathcal{L}(U, K)$.

(c) Zeige jeweils durch ein nicht-triviales Gegenbeispiel (d. h. $U \neq \{0\}$), dass die Umkehrung von (a) und (b) nicht gilt.

Aufgabe 10.2
Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 3×3 Matrizen M, für die gilt: Es existiert ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass die Einträge jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen von M sich zu r aufsummieren. Also

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; \begin{array}{lll} \sum_{i=1}^3 a_{1i} = & \sum_{i=1}^3 a_{2i} = & \sum_{i=1}^3 a_{3i} = \\ \sum_{j=1}^3 a_{j1} = & \sum_{j=1}^3 a_{j2} = & \sum_{j=1}^3 a_{j3} = \\ \sum_{i=1}^3 a_{ii} = & \sum_{i+j=4} a_{ij} & \end{array} \right\}.$$

(a) Sei $\mathcal{T}$ der Teilraum von $\mathcal{M}$, der von der Matrix erzeugt wird, bei der jeder Eintrag gleich 1 ist. Sei $\mathcal{S}$ der Unterraum von $\mathcal{M}$, der die Matrizen enthält, deren Spalten, Zeilen und Diagonalen sich zu Null addieren.
Zeige, dass $\mathcal{M} = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S}$.

(b) Berechne die Dimension von $\mathcal{S}$.

Hinweis: Betrachte die Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist und berechne den Rang der Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) Was ist die Dimension von $\mathcal{M}$? Gib eine Basis von $\mathcal{M}$ an.

Aufgabe 10.3

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei V^* der Dualraum von V (siehe Definition 4.4.1). Definiere die Abbildung

$$\mathrm{ev}\colon V \longrightarrow (V^*)^*$$

durch $\mathrm{ev}(v) := f \mapsto f(v)$.

(a) Zeige, dass ev eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeige, dass ev ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.4

(a) Seien $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ und $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilberträume und sei $\alpha : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass α^* bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ nicht notwendigerweise gleich α^* bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ist.

(b) Seien $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ endlich dimensionale Prä-Hilberträume und $\alpha : \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ eine lineare Abbildung. Zeige:

(i) Wenn α ein Monomorphismus ist, dann ist $\alpha^*\alpha$ is ein Isomorphismus.

(ii) Wenn α ein Epimorphismus ist, dann ist $\alpha\alpha^*$ ein Isomorphismus.

Abgabe **Montag, 23.01.2012** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
