Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1
Zeige, dass die symmetrische Gruppe n-ten Grades $\mathfrak{S}_n$ genau für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ ist. (Siehe Bemerkung 6.2.2 (c).)

Aufgabe 11.2
Sei

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Schreibe τ und σ jeweils als Zyklus.

(b) Zeige, dass alle Elemente von $\mathfrak{S}_3$ in der Form $\tau^n \sigma^m$ geschrieben werden können, wobei $n \in \{0, 1\}, m \in \{0, 1, 2\}$ ist.

(c) Finde alle Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$.

Aufgabe 11.3
Eine Matrix A ist symmetrisch, wenn $A = A^T$, und *schiefsymmetrisch,* wenn $A = -A^T$ gilt.

(a) Zeige, dass jede hermitesche Matrix C in der Form $C = A + iB$ geschrieben werden kann, wobei A eine symmetrische Matrix ist, B eine schiefsymmetrische Matrix ist und A und B nur reelle Einträge haben.

(b) Zeige, dass es zu jeder komplexen Matrix C hermitesche Matrizen A und B so gibt, dass $C = A + iB$.

Aufgabe 11.4

Für Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ sei das *Vektorprodukt*, auch *Kreuzprodukt* genannt, definiert durch:

$$v \times w := \left(\det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \right)^T$$

Zeige:

(a) $w \times v = -(v \times w)$

(b) $v \times v = 0$

(c) Das Kreuzprodukt ist linear in beiden Variablen.

(d) $v \times w \perp v$, $v \times w \perp w$

(e) $e_1 \times e_2 = e_3$

(f) Das Kreuzprodukt ist *nicht* assoziativ.

(g) v, w linear abhängig $\iff v \times w = 0$

(h) Sind v, w linear unabhängig und $s \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle v, s \rangle = 0$ und $\langle w, s \rangle = 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$s = \lambda \, (v \times w) \, .$$

(i) Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

Abgabe **Montag, 30.01.2012** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
