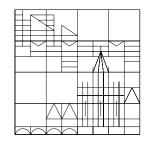
Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann Dr. Lorna Gregory Katharina Dupont



Lineare Algebra I Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1

Zeige, dass die symmetrische Gruppe n-ten Grades \mathfrak{S}_n genau für $n \geq 3$ nicht kommutativ ist. (Siehe Bemerkung 6.2.2 (c).)

Aufgabe 11.2

Sei

$$\tau = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ und } \sigma = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

- (a) Schreibe τ und σ jeweils als Zyklus.
- (b) Zeige, dass alle Elemente von \mathfrak{S}_3 in der Form $\tau^n \sigma^m$ geschrieben werden können, wobei $n \in \{0,1\}, m \in \{0,1,2\}$ ist.
- (c) Finde alle Untergruppen von \mathfrak{S}_3 .

Aufgabe 11.3

Eine Matrix A ist symmetrisch, wenn $A=A^T$, und schiefsymmetrisch, wenn $A=-A^T$ gilt.

- (a) Zeige, dass jede hermitesche Matrix C in der Form C=A+iB geschrieben werden kann, wobei A eine symmetrische Matrix ist, B eine schiefsymmetrische Matrix ist und A und B nur reelle Einträge haben.
- (b) Zeige, dass es zu jeder komplexen Matrix C hermitesche Matrizen A und B so gibt, dass C = A + iB.

Aufgabe 11.4

Für Vektoren $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^3 sei das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt genannt, definiert durch:

$$v \times w := \left(\det \left(\begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right), -\det \left(\begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right), \det \left(\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right) \right)^T$$

Zeige:

$$(a) \ w \times v = -(v \times w)$$

(b)
$$v \times v = 0$$

(c) Das Kreuzprodukt ist linear in beiden Variablen.

(d)
$$v \times w \perp v$$
, $v \times w \perp w$

$$(e) e_1 \times e_2 = e_3$$

(f) Das Kreuzprodukt ist *nicht* assoziativ.

$$(g) \ v, w \ \text{linear abhängig} \iff v \times w = 0$$

 $\begin{array}{ll} (h) \ \ {\rm Sind} \ v,w \ \ {\rm linear} \ \ {\rm unabh\"{a}ngig} \ \ {\rm und} \ \ s\in \mathbb{R}^3 \ \ {\rm mit} \ \ \langle v,s\rangle = 0 \ \ {\rm und} \ \ \langle w,s\rangle = 0, \ \ {\rm dann} \ \ \ {\rm gibt} \ \ {\rm es} \ \ {\rm ein} \ \ \lambda \in \mathbb{R} \ \ {\rm mit} \end{array}$

$$s = \lambda (v \times w)$$
.

(i) Für
$$x, y, z \in \mathbb{R}^3$$
 gilt: $\langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

Abgabe Montag, 30.01.2012 bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.