Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 Die Vandermonde-Determinante

Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ mit $n \geq 2$ und

$$V_n := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeige mit Induktion über n, dass $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ gilt.

Hinweis: Zeige für den Induktionsschritt: $V_n = (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}$

Aufgabe 12.2

(a) Wir sagen, dass eine Matrix $A = (a_j^i) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine *obere Dreiecksmatrix* ist, wenn $a_j^i = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$ gilt.

Zeige, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Einträge auf der Diagonalen ist, also $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i^i$.

(b) Sei $a \in \mathbb{K}$. Berechne die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & a & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & a & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3 Cramersche Regel

In der nächsten Vorlesung zeigen wir die *Cramersche Regel:*
Für $n \in \mathbb{N}, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist die eindeutig bestimmte Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n)}{\det(A)}$$

für $1 \leq j \leq n$.
Benutze diese Regel, um das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 9x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 12.4

Wir schließen an Aufgabe 11.4 — mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^3$ — an. Zeige für $v, w, z \in \mathbb{R}^3$:

(j) (i) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$,
und damit

(ii) $\big|\langle v, w \rangle\big| \leq \|v\|\,\|w\|$ und

(iii) $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\,\|w\|$ genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

(k) $\|v \times w\| = \|v\|\,\|w\| \cdot \sin\angle(v, w)$ (v, w linear unabhängig)

(l) Das Volumen des *Spats*, auch *Parallelepiped* oder *Parallelotop* genannt,

$$\big\{\lambda\, v + \mu\, w + \varrho\, z \mid 0 \leq \lambda, \mu, \varrho \leq 1\big\}$$

ist gerade durch $|\langle v \times w, z \rangle|$ gegeben. Die Größe

$$[v, w, z] := \langle v \times w, z \rangle$$

heißt *Spatprodukt.*

Abgabe **Montag, 06.02.2012** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.