



Lineare Algebra I

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^4 sind *Unterräume* von \mathbb{R}^4 (als \mathbb{R} -Vektorraum)?

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y, w = z \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 1, w = z \right\}$$

$$(c) \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 = w \right\}$$

$$(d) \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid w + x + y = z, 2x + 3y = 0 \right\}$$

Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4.2

Es seien V ein Vektorraum und $U, W \subset V$ *Unterräume* von V .

(a) Gib ein Beispiel an, für das $U \cup W$ kein Unterraum von V ist.

(b) Zeige, dass $U \cup W$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$ gilt.

Aufgabe 4.3

Es sei $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Definiere für alle $x, y \in V$

$$x \oplus y := x \cdot y$$

und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in V$

$$\alpha \otimes x := x^\alpha.$$

Zeige oder widerlege, dass (V, \oplus, \otimes) ein \mathbb{R} -Vektorraum ist.

Aufgabe 4.4 Erzeugendensysteme

(a) Zeige oder widerlege, dass die folgenden Vektoren ein *Erzeugendensystem* von \mathbb{R}^4 als \mathbb{R} -Vektorraum sind:

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\{u, v, w, x\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V . Zeige, dass $\{u+v, v+w+x, w-x, w-u-v\}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V ist.

(c) Gib einen Körper K , einen K -Vektorraum V und Vektoren $u, v \in V$ so an, dass $\{u, v\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, aber V nicht von $\{u+v, u-v\}$ erzeugt wird.

Abgabe **Montag, 21.11.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
