Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Lineare Unabhängigkeit

(a) Sei $V = \mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Teilmengen von V sind linear unabhängig?

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) Sei W der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von W sind linear unabhängig?

(i) $\{\cos^2(x),\, 1,\, \sin^2(x)\}$

(ii) $\{\sin(x),\, \cos(x),\, x^2\}$

(iii) $\{f_r \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ mit $f_r(x) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < r; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) Seien X und Y linear unabhängige Teilmengen eines Vektorraumes V. Keines der Elemente von X sei eine Linearkombination von Elementen von Y und keines der Elemente von Y sei eine Linearkombination von Elementen aus X. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Die Menge $X \cup Y$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 5.2 Basen und Dimension

(a) Finde für die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$ von Blatt 4 eine Basis und gib die Dimension der Räume an:

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y,\ w = z \right\}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid w + x + y = z,\ 2x + 3y = 0 \right\}$

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Gib eine Basis von V an, die keine Elemente von U enthält.

(c) Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U ein echter Unterraum von V (d.h. $U \neq V$). Zeige, dass V eine Basis besitzt, die keine Elemente von U enthält.

Aufgabe 5.3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Sei $P_n \subset V$ die Menge der polynomialen Funktionen von Grad $\leq n$, also

$P_n = \{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha_n \cdot x^n + \cdots + \alpha_0 \text{ für } \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

(a) Zeige, dass P_n ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeige, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_n^r = \{f \in P_n \mid f(r) = 0\}$$

ein Untervektorraum von P_n ist.

(c) Gib für U_n^0, U_n^1, $U_n^0 + U_r^1$ und $U_n^0 \cap U_n^1$ jeweils eine Basis und die Dimension an.

Aufgabe 5.4 Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $F \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y, z) = (x, y)$.

(b) $F \colon V \longrightarrow V$ definiert durch $F(x) = -x$, wobei K ein Körper und V ein K-Vektorraum sind.

(c) $F \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (x, y, z) + (0, -1, 0)$.

(d) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y) = (2x + y, y)$.

(e) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y) = (y, x)$.

(f) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = xy$.

Abgabe **Montag, 28.11.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
