Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e.

(a) G habe n Elemente. Zeige, dass dann zu jedem $g \in G$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $m \leq n$ und $g^m = e$.

(b) Zeige, dass G kommutativ ist, falls für alle $g \in G$, $g^2 = e$ ist.

Aufgabe 7.2

Sei P_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der polynomialen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ in der Variablen x, vom Grad kleiner oder gleich n (siehe Aufgabe 5.3).

(a) Zeige, dass die Differentation nach x, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, eine lineare Abbildung von P_n nach P_n ist. Dabei definieren wir

$$\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) := n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

(b) Gib einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, "\Phi"] \\
P_n \arrow[r, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"] & P_n
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aufgabe 7.3

(a) Zeige, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ nicht kommutativ ist, in dem du zeigst, dass die folgenden Elemente von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ nicht kommutieren:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

(b) Sei $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$ die Menge

$$\{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \forall\ h \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})\ gh = hg\}.$$

Berechne $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$.

Hinweis: *Überlege zuerst, welche Matrizen mit*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

vertauschen.

Aufgabe 7.4 Rotation und Spiegelung

(a) Für $\theta \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

die Rotation um den Ursprung um den Winkel θ.

Zeige für $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$:

(i) $D(0) = I$

(ii) $D(\theta_1) \cdot D(\theta_2) = D(\theta_1 + \theta_2)$

(iii) $D(\theta)$ ist invertierbar mit $D(\theta)^{-1} = D(-\theta)$

(iv) $D(\theta)^n = D(n\theta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) Gib eine Matrix an, durch die die Spiegelung an

   (i) der x-Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

   (ii) der y-Achse $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

   (iii) der Winkelhalbierenden $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

   im $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

Hinweis: *Die folgenden Formeln dürfen ohne Beweis verwendet werden:*

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) && (1)\\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) && (2)\\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 && (3)\\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta && (4)\\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta && (5)
\end{aligned}
$$

Abgabe **Montag, 12.12.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.