Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Transformationsabbildung
Sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Schreibe die Elemente der Basis $\mathcal{A}$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}$ und die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{A}$.

(b) Berechne die Transformationsabbildungen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(c) Was ist das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 8.2 Basiswechsel
Seien φ, ψ lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ habe φ die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, und bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ habe ψ die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Darstellungsmatrix von $\varphi + \psi$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Berechne die Darstellungsmatrix von $\varphi \circ \psi$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Aufgabe 8.3 Skalarprodukte

(a) Sei V ein $\mathbb{R}$ Vektorraum. Welche der definierenden Eigenschaften für ein Skalarprodukt sind für die folgenden Funktionen $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt? Bei welchen Funktionen handelt es sich um Skalarprodukte?

   (i) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$.

   (ii) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 6x_2y_2 - 6x_3y_3$, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$.

   (iii) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $\langle x, y \rangle = x_1x_2y_1y_2$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$.

(b) Zeige, dass ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum nicht in beiden Komponenten linear sein kann.

Aufgabe 8.4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Für alle $x \in V$ sei $||T(x)|| = ||x||$.

   Zeige, dass $\langle Tx, Ty \rangle + \langle Ty, Tx \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt. **Hinweis:** *Füge an geeigneter Stelle $||T(x - y)||$ ein.*

(b) Zeige, dass genau dann $||T(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ gilt, wenn $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$ ist.

   Hinweis: *Ist $z = a + ib$ eine komplexe Zahl, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $\Re(z) := a$ für den Realteil von z und $\Im(z) := b$ für den Imaginärteil von z. Benutze die Formeln $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ und die Gleichung aus (a) um zu zeigen, dass $\Re\langle Tx, Ty \rangle = \Re\langle x, y \rangle$. Zeige dann, indem du y durch iy ersetzt, dass $\Im\langle Tx, Ty \rangle = \Im\langle x, y \rangle$.*

Abgabe **Montag, 19.12.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
