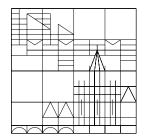
#### Universität Konstanz

## Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



# Lineare Algebra I Übungsblatt 8

## Aufgabe 8.1 Transformationsabbildung

Sei  $\mathcal{A}=(e_1,e_2,e_3)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  und

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

eine weitere Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Schreibe die Elemente der Basis  $\mathcal{A}$  als Linearkombination der Elemente von  $\mathcal{B}$  und die Elemente der Basis  $\mathcal{B}$  als Linearkombination der Elemente von  $\mathcal{A}$ .
- (b) Berechne die Transformationsabbildungen  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  und  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ .
- (c) Was ist das Inverse der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

## Aufgabe 8.2 Basiswechsel

Seien  $\varphi, \psi$  lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Bezüglich der Basis  $\mathcal{A} = \left( \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) \right)$  habe  $\varphi$  die Darstellungsmatrix  $\left( \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right)$ , und bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = \left( \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \right)$  habe  $\psi$  die Darstellungsmatrix  $\left( \begin{array}{c} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right)$ .

- (a) Berechne die Darstellungsmatrix von  $\varphi + \psi$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .
- (b) Berechne die Darstellungsmatrix von  $\varphi \circ \psi$  bezüglich der Basis  $\mathcal{A}$ .

### Aufgabe 8.3 Skalarprodukte

- (a) Sei V ein  $\mathbb R$  Vektorraum. Welche der definierenden Eigenschaften für ein Skalarprodukt sind für die folgenden Funktionen  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb R$  erfüllt? Bei welchen Funktionen handelt es sich um Skalarprodukte?
  - (i) Sei  $V=\mathbb{R}^3$  und sei  $\langle x,y\rangle=3x_1y_1+2x_2y_2+4x_3y_3$ , wobei  $x=(x_1,x_2,x_3)$  und  $y=(y_1,y_2,y_3)$ .
  - (ii) Sei  $V=\mathbb{R}^3$  und sei  $\langle x,y\rangle=2x_1y_1+6x_2y_2-6x_3y_3$ , wobei  $x=(x_1,x_2,x_3)$  und  $y=(y_1,y_2,y_3)$ .
  - (iii) Sei  $V=\mathbb{R}^2$  und sei  $\langle x,y\rangle=x_1x_2y_1y_2$ , wobei  $x=(x_1,x_2)$  und  $y=(y_1,y_2).$
- (b) Zeige, dass ein Skalarprodukt auf einem C-Vektorraum nicht in beiden Komponenten linear sein kann.

### Aufgabe 8.4

Sei V ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (wobei  $\mathbb{K}=\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K}=\mathbb{C}$  ist),  $\langle\cdot,\cdot\rangle$  ein Skalarprodukt auf V und  $T:V\to V$  eine lineare Abbildung.

- (a) Für alle  $x \in V$  sei ||T(x)|| = ||x||. Zeige, dass  $\langle Tx, Ty \rangle + \langle Ty, Tx \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$  für alle  $x, y \in V$  gilt. **Hinweis:** Füge an geeigneter Stelle ||T(x-y)|| ein.
- (b) Zeige, dass genau dann ||T(x)|| = ||x|| für alle  $x \in V$  gilt, wenn  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in V$  ist.

**Hinweis:** Ist z=a+ib eine komplexe Zahl, wobei  $a,b\in\mathbb{R}$ , so schreiben wir  $\Re(z):=a$  für den Realteil von z und  $\Im(z):=b$  für den Imaginärteil von z. Benutze die Formeln  $\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$  und  $\Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$  und die Gleichung aus (a) um zu zeigen, dass  $\Re\langle Tx,Ty\rangle=\Re\langle x,y\rangle$ . Zeige dann, indem du y durch iy ersetzt, dass  $\Im\langle Tx,Ty\rangle=\Im\langle x,y\rangle$ .

Abgabe Montag, 19.12.2011 bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.