Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 Orthogonale Familien
Es sei $\mathfrak{H}$ der Vektorraum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen reellwertigen Funktionen mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

gegebenen Skalarprodukt. Dann ist

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots\}$$

eine orthogonale Familie.
(Dies spielt bei Fourier-Reihen eine entscheidende Rolle.)

Aufgabe 9.2
Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$.

(a) Für alle $0 < i, j \leq 4$ mit $i \neq j$ sei

$$\langle v_i, v_j \rangle < 0.$$

Zeige, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Stimmt es, dass auch $v_1, ..., v_4$ linear unabhängig sein müssen?

Aufgabe 9.3 Gram-Schmidt-Verfahren
Benutze das im Beweis von Satz 5.2.1 beschriebene Gram-Schmidt-Verfahren, um im $\mathbb{R}^4$ zu den gegebenen Vektoren

$$a = (1, 1, 0, 1)^T,\ b = (1, -2, 0, 0)^T,\ c = (1, 0, -1, 2)^T$$

ein Orthonormalsystem (A, B, C) — bezüglich des Standardskalarprodukts — zu finden mit $\langle A, B, C \rangle = \langle a, b, c \rangle$.

Aufgabe 9.4
Es seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt und W_1 und W_2 Unterräume von V. Zeige:

(a) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

(b) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

Abgabe **Montag, 16.01.2012** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
