Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 6

Hinweis: *Am Mittwoch (30.11.2011) findet die Vorlesung ausnahmsweise in Raum* **R 513** *statt.*

Aufgabe 6.1 Direkte Summe

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind U und W Unterräume des Vektorraums V, dann sagen wir, dass V die direkte Summe von U und W ist, wenn $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$ gilt. Wir schreiben dann $V = U \oplus W$.

(a) Benutze Satz 3.2.7 c) (Basisergänzungssatz) um für den Fall, dass V endlich-dimensional ist zu zeigen, dass zu jedem Unterraum U des Vektorraums V ein weiterer Unterraum U' von V so existiert, dass V die direkte Summe von U und U' ist.

(b) Sei $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige dass, wenn $\alpha^2 = \alpha$ ist, $\ker \alpha \oplus \text{im}\, \alpha = V$ gilt.

Aufgabe 6.2

(a) Zeige, dass für zwei Unterräume U, V des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^6$ mit $U + V = \mathbb{R}^6$ gilt, dass $U \cap V = \{0\}$ ist, falls $\dim U = \dim V = 3$.

(b) Beweise, dass für zwei Unterräume U, V des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^9$ mit $\dim U = \dim V = 5$ gilt $U \cap V \neq \{0\}$.

(c) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Weiter seien $U_1, ..., U_n$ Unterräume von V. Definiere die direkte Summe von n Unterräumen $\oplus_{i=1}^n U_i$ geeignet und zeige dann, dass $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim U_i$ gilt, falls $\oplus_{i=1}^n U_i = V$.

Aufgabe 6.3

(a) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Weiter sei $\alpha\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (i) α ist injektiv.
- (ii) α ist surjektiv.
- (iii) α ist bijektiv.

(b) Sind die folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründe deine Antwort.

- (1) $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y, z) = (x, y)$.
- (2) $F\colon V \longrightarrow V$ definiert durch $F(x) = -x$, wobei K ein Körper und V ein K-Vektorraum sind.
- (3) $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y) = (y, y, x)$.
- (4) $F\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definiert durch $F(w, x, y, z) = (z, x - y, z, w)$.

Aufgabe 6.4

Sei K ein Körper und seien U, V, W K-Vektorräume. Seien $\alpha\colon U \longrightarrow V$ und $\beta\colon V \longrightarrow W$. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen gelten.

(a) Wenn α und β injektiv sind, dann ist auch $\beta \circ \alpha$ injektiv.

(b) Wenn α und β surjektiv sind, dann ist auch $\beta \circ \alpha$ surektiv.

(c) Ist $\beta \circ \alpha$ injektiv, dann ist auch α injektiv.

(d) Ist $\beta \circ \alpha$ surjektiv, dann ist auch β surjektiv.

Abgabe **Montag, 05.12.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
