Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

Sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeige mit Induktion

$$M^n = \begin{pmatrix} 1-2n & -4n \\ n & 1+2n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.2 (**Die komplexen Zahlen als Unterring der 2$\times$2-Matrizen**)

Sei $\mathbb{C}$ die folgende Menge von Matrizen

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbb{C}$ mit der Matrixaddition $+$ und Matrixmultiplikation $\cdot$ ein Körper ist *(linear-algebraische Einführung der komplexen Zahlen)*.

(Hinweise: Wurde etwas bereits in der Vorlesung gezeigt, darfst du auf den entsprechenden Satz verweisen.

Um die Kommutativität zu zeigen, nimm zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

und berechne AC und CA.

Um zu zeigen, dass jedes Element von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Inverses hat, nimm eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

die nicht gleich Null ist (also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) und zeige, dass

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

ist.)

(b) Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \ni a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

liefert eine ‚*Einbettung*'; ‚von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Definiere

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Zeige

$$i^2 = \varphi(-1)$$

und

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi(a) + i\varphi(b) .$$

Bemerkung: Wir können jedes Element $a \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(a)$ ‚identifizieren' und damit $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ sehen. Jedes Element aus $\mathbb{C}$ lässt sich dann als $a + ib$ für reelle Zahlen a und b schreiben.

Aufgabe 2.3

Beweise — nach dem Muster der entsprechenden Beweise in der Vorlesung — die verbleibenden Aussagen (α), (β), (γ), (ε) und (ϑ) über das *Bruchrechnen.*

Aufgabe 2.4 (Endliche Körper)

Let $\mathbb{F}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Wir definieren die Addition in $\mathbb{F}_7$ wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_7 & \to & \mathbb{F}_7 \\ & (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{c} \in \mathbb{F}_7 \end{array}$$

mit $\overline{c} \in \mathbb{F}_7$ so, dass $a + b = c + 7n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
Multiplikation in $\mathbb{F}_7$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_7 & \to & \mathbb{F}_7 \\ & (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{c} \in \mathbb{F}_7 \end{array}$$

mit $\overline{c} \in \mathbb{F}_7$ so, dass $a \cdot b = c + 7n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Berechne

(i) $\overline{5} + \overline{6}$

(ii) $\overline{5} \cdot \overline{3}$

(iii) $\begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{5} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$,

wobei die Matrixmultiplikation genauso, wie für reelle Matrizen definiert ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{F}_7$ mit $+$ und $\cdot$, wie oben definiert, ein Körper ist.

Bemerkung: Wir können uns die Elemente von $\mathbb{F}_7$ als Wochentage vorstellen. Ist also $\overline{0} = \mathrm{Sonntag}$, $\overline{1} = \mathrm{Montag}, \ldots$, können wir die Gleichung $\overline{3} + \overline{6} = \overline{2}$ wie folgt verstehen: ‚Wenn heute Mittwoch ist, dann ist in sechs Tagen Dienstag."
Möglicherweise findest du es auch hilfreich an eine Uhr mit sieben statt zwölf Stunden zu denken. Angenommen es ist vier Uhr und wir wollen wissen, wieviel Uhr es in vier Stunden ist. Wir drehen den Uhrzeiger von $\overline{4}$ auf $\overline{5}$, dann weiter auf $\overline{6}$. Drehen wir den Zeiger noch eine Stunde weiter kommen wir auf $\overline{0}$ ($0 = 0 + 1 \cdot 7$) und drehen wir dann den Zeiger zum vierten Mal weiter sind wir bei $\overline{1}$ ($1 = 1 + 1 \cdot 7$). Das gleiche Ergebnis bekommen wir, wenn wir $4 + 4$ wie gewohnt ausrechnen und dann den Rest von $(4 + 4) : 7$ in den natürlichen Zahlen nehmen.

Abgabe **Montag, 7. November 2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411
