Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1
In welchen der folgenden Fälle handelt es sich um *abelsche Gruppen* (d. h. (A1), (A2), (A3), (A4) sind erfüllt)?

(a) $(\mathbb{N}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf den natürlichen Zahlen ist.

(b) $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf den ganzen Zahlen ist.

(c) $(G, \oplus)$, wobei $G = \{e, f, g\}$ und $\oplus$ wie folgt definiert ist:

$\oplus$	e	f	g
e	e	f	g
f	f	e	g
g	g	g	e

.

(d) $(\mathbb{Z}, -)$ wobei $-$ die gewöhnliche Subtraktion auf den ganzen Zahlen definiert.

(e) $(\mathbb{C}, \cdot)$ wobei $\cdot$ die Körpermultiplikation auf $\mathbb{C}$ ist (siehe Blatt 2).

Aufgabe 3.2
Eine Matrix A heißt genau dann *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $A^n = 0$.

(a) Gib ein Beispiel für eine nilpotente Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{0\}$ an.

(b) Gib ein Beispiel für zwei 2×2 Matrizen A, B mit $AB \neq BA$ an.

(c) Es seien A, B nilpotente $m \times m$ Matrizen, die kommutieren (das heißt $AB = BA$). Zeige, dass dann AB und $A + B$ nilpotent sind.

(d) Gib nilpotente 2×2 Matrizen A, B so an, dass $A + B$ nicht nilpotent ist.

Aufgabe 3.3
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Wir sagen, dass $k \subset K$ ein *Teilkörper* von K ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle $a, b \in k$ ist $a \cdot b \in k$.

(ii) Für alle $a, b \in k$ ist $a + b \in k$.

(iii) $(k, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(a) Es sei $k \subset K$. Zeige, dass k genau dann ein Teilkörper von K ist, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$(K1)$ $0, 1, -1 \in k$,
$(K2)$ für alle $a \in k \backslash \{0\}$ ist $a^{-1} \in k$,
$(K3)$ für alle $a, b \in k$ ist $a \cdot b \in k$ und $a + b \in k$.

(b) Nenne ein Beispiel einer Teilmenge k von $\mathbb{Q}$ derart, dass $a + b \in k$ und $a \cdot b \in k$ für alle $a, b \in k$ gilt, aber k kein Teilkörper von $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Zeige, dass $\mathbb{Q}$ der einzige Teilkörper von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3.4
Es seien A eine Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionen $f\colon A \longrightarrow V$ einen K-Vektorraum bildet, wenn man die Verknüpfungen elementweise erklärt, d. h. für $f, g \in \mathfrak{F}, \lambda \in K$ und $x \in A$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda.f)(x) := \lambda.(f(x))$$

Hinweis: Denke daran, alle deine Behauptungen auch zu beweisen. Insbesondere solltest du bei allen Beispielen zeigen, dass dein Beispiel auch wirklich die gewünschten Eigenschaften hat.

Abgabe **Montag, 14.11.2011** bis 14.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
