Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra I
Wiederholungsblatt

Dieses Übungsblatt ist dazu gedacht, euch bei der Wiederholung des bisherigen Stoffes und der Vorbereitung auf die Übungsklausur zu unterstützen. Die Bearbeitung ist freiwillig. Wir legen euch aber allen nahe, euch während der vorlesungsfreien Zeit nochmals ausführlich mit dem bisher behandelten Stoff auseinander zu setzen. Zusätzlich zur Bearbeitung dieses Blattes ist es natürlich auch sinnvoll, sich die bisherigen Übungsaufgaben nochmals anzusehen und das Skript sorgfältig durchzuarbeiten.

Selbsteinschätzung und Zielsetzung
Die folgenden Fragen sollen dir helfen, dich selber einzuschätzen und zu sehen, an welchen Dingen du noch arbeiten solltest.

- Wie gut würde ich abschneiden, wenn ich jetzt eine Klausur über den bisherigen Stoff schreiben würde?
- Was ist mein Ziel für die Probeklausur Anfang Januar?
- Was ist mein Ziel für die Klausur am 29. Februar?
- Kann ich die Definitionen aus der Vorlesung ohne Skript genau wiedergeben?
- Kann ich die wichtigsten Sätze aus der Vorlesung angeben?
- Kann ich die Definitionen erklären?
- Kann ich die in der Vorlesung definierten Begriffe angemessen verwenden?
- Kann ich überprüfen, ob ein Beispiel die Bedingungen einer Definition erfüllt?
- Erkenne ich Zusammenhänge zwischen den Definitionen?
- Erkenne ich, wann ich einen Satz anwenden kann, d. h. kenne ich die Voraussetzungen und kann überprüfen, ob sie erfüllt sind?
- Kann ich mithilfe von Sätzen aus der Vorlesung Schlüsse für ein gegebenes Beispiel ziehen?
- Kenne ich die wichtigsten Beweistechniken, die in der Vorlesung und in den Übungen vorkamen, und kann ich diese anwenden, um selbstständig eine Aussage zu zeigen?
- Erkenne ich bei einer Aufgabe, was die Voraussetzungen und Behauptungen sind?
- Kann ich einen Beweis strukturiert aufschreiben?
- Kann ich die Beweise aus dem Vorlesungsskript und den Übungen nachvollziehen?

- Kann ich die Aussagen aus in den Übungen besprochenen Aufgaben ohne meine Notizen beweisen?
- Kenne ich die in den Vorlesungen und Übungen vorkommenden Rechenverfahren und Algorithmen und kann diese anwenden? (z. B. Lösen von Gleichungssystemen, Matrixmultiplikation, Basiswechselmatritzen, Darstellungsmatritzen,...)

Aufgabe W.1 Definitionen
Mit den unten angegebenen Begriffen solltest du umgehen können.
Die folgende Vorgehensweise hilft dir dabei vielleicht, dein Wissen zu überprüfen und zu verbessern:

(a) Schreibe die Definitionen auf.

(b) Schreibe auf, was dir im Zusammenhang mit den Definitionen einfällt. (Beispiele, Sätze, Äquivalenzen, Zusammenhänge zwischen den Definitionen,...)

(c) Überprüfe und ergänze mit Hilfe des Skripts, was du notiert hast.

(d) Notiere, was du noch nicht verstanden hast, um z. B. deinen Übungsleiter oder Herrn Hoffmann zu fragen.

(e) Diskutiere mit anderen über das, was du in den vorherigen Schritten gemacht hast.

(f) Fragt euch gegenseitig ab.

Wichtige Begriffe

- Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems
- Körper
- $\mathbb{K}$-Vektorraum (zu einem gegebenem Körper $\mathbb{K}$)
- Unterraum eines Vektorraumes
- Erzeugendensystem eines Vektorraumes
- Linear unabhängige Menge in einem Vektorraum
- Lineare Hülle einer Menge von Vektoren
- Basis eines Vektorraumes
- Dimension eines Vektorraumes
- Lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen
- Injektive/surjektive/bijektive Abbildung
- Kern einer linearen Abbildung
- Bild einer linearen Abbildung
- f_A zu einer Matrix A

- Darstellende Matrix einer Abbildung
- Gruppe
- Untergruppe einer Gruppe
- Skalarprodukt eines Vektorraumes

Aufgabe W.2 Richtig oder Falsch?
Überlege dir bei den folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Versuche jeweils, ein Gegenbeispiel oder einen Beweis (z. B. einen passenden Satz aus der Vorlesung) zu finden, um deine Antwort zu begründen.

(a) Eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = 0$ gilt.

(b) Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem euklidischen Vektorraum ist , nimmt $\langle v, v \rangle$ alle Werte aus $\mathbb{R}$ an.

(c) Es sei U ein Unterraum von V. Dann gilt $\dim U \leq \dim V$.

(d) Die Menge aller Matritzen ist bezüglich Multiplikation eine Gruppe.

(e) Sei $f\colon U \longrightarrow V$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen U, V. Wenn $f(0) \neq 0$ gilt, dann ist f nicht linear.

(f) Wenn $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ linear abhängig sind, so ist v_{n+1} eine Linearkombination von $v_1, ..., v_n$.

(g) Es seien $\dim V = n$ und $v_1, ..., v_{n+1}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann existiert eine linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, ..., v_{n+1}\}$ mit n Elementen.

(h) Falls sie definiert ist, dann ist die Komposition $f \circ g$ zweier linearer Abbildungen f und g ebenfalls linear.

(i) Das Nullelement einer Gruppe ist eindeutig bestimmt.

(j) Es seien G eine Gruppe und $a \in G$. Das Inverse von a ist eindeutig bestimmt.

(k) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Multiplikation $\star$. Dann ist $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \star)$ eine Gruppe.

(l) Wenn $v, w \in V$ zwei Vektoren in einem Vektorraum V mit $v \neq w$ und $v, w \neq 0$ sind, dann hat V eine Basis, die v und w enthält.

(m) Jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(n) Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der von $v_1, v_2, v_3 \in V$ erzeugt wird, so ist $\dim V = 3$.

(o) Es seien V ein Vektorraum und $w \in V$ mit $w \neq 0$. Die Abbildung $f\colon V \longrightarrow V$, definiert durch $f(v) = w - v$ für alle $v \in V$, ist linear.

(p) Wenn x, y linear unabhängig sind und x, y, z linear abhängig sind, dann liegt z in der linearen Hülle von x, y.

(q) Wenn x, y linear unabhängig sind und x, y, z linear abhängig sind, dann liegt x in der linearen Hülle von y, z.

(r) Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn es einen Skalar so gibt, dass man einen der beiden Vektoren durch Multiplikation des anderen Vektors mit dem Skalar erhält.

(s) Es sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\dim \operatorname{im} f \leq \dim V$.

(t) Es seien $v_1, ..., v_n$ Vektoren aus einem n-dimensionalen Vektorraum V. Die Vektoren sind linear unabhängig genau dann, wenn sie ein Erzeugendensystem von V bilden.

(u) Es seien $U \neq \{0\}$ ein Unterraum von V und $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V. Dann existiert $1 \leq i \leq n$ so, dass $v_i \in U$.

(v) Es seien $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\operatorname{im} f \subset \ker f$, dann ist $f^2 = 0$.

(w) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $a \in \mathbb{K}$ ist $a \cdot 0 = 0$.

(x) Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem euklidischen Vektorraum ungleich dem Nullvektorraum ist, nimmt $\langle v, v \rangle$ alle positiven Werte aus $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe W.3 Unterräume

Es sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die aus allen Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$ besteht, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $x_1 > 1$.

(ii) $x_1^2 \leq 0$.

(iii) $x_1 + x_2 = x_3$.

(iv) $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$.

(v) $x_1 + x_2 = 2$.

(vi) $x \in \ker \alpha$, wobei α die durch

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 - 2x_2, x_3 - x_4, x_4 - 4x_1)$$

gegebene Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^4$ ist.

(a) Bestimme in jedem Fall, ob U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist oder nicht.

(b) Für jeden Unterraum bestimme eine Basis und die Dimension von U.

Aufgabe W.4

(a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $\alpha^n = 0$ und $\alpha^{n-1} \neq 0$.

Zeige, dass für alle $u \in V$ mit $\alpha^{n-1}u \neq 0$, die Vektoren $u, \alpha u, ..., \alpha^{n-1}u$ linear unabhängig sind.

(b) Stimmt es, dass zu jedem endlich dimensionalen Vektoraum V eine lineare Abbildung $\alpha\colon V \longrightarrow V$, $n \in \mathbb{N}$ und ein Vektor $v \in V$ so existieren, dass $v, \alpha v, ..., \alpha^n v$ eine Basis von V ist?

Aufgabe W.5 Gruppen
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit $G = \{e, a, b\}$, wobei e das neutrale Element ist und G also genau drei Elemente besitzt.

(a) Bestimme ab.

(b) Schreibe ein Multiplikationstabelle für G.

Aufgabe W.6 Körper
Zeige, dass die Menge $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ mit der von $\mathbb{R}$ kommenden Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe W.7 Basiswechsel
Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die unter den Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ die folgende Darstellung hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Darstellungsmatrix von α bezüglich der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ und der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe W.8
Es seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und V_1 und V_2 Unterräume von V.
Sei $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Zeige, dass $V_1 + V_2$ entweder gleich V_1 ist oder gleich V_2 und $V_1 \cap V_2$ entsprechend gleich V_2 oder V_1 ist.

Aufgabe W.9
Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Es seien $x, y \in V$. Zeige, dass $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

(b) Gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch die Umkehrung? Gilt die Umkehrung auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(c) Es sei $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ genau dann gilt, wenn $||sx + ty|| = s||x|| + t||y||$, für alle $s, t \geq 0$ gilt.

Wir wünschen euch allen schöne Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr!