Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

29. Februar 2012

Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra“

Es gibt *sechs* Aufgaben bei denen jeweils maximal 10 Punkte erreicht werden können. Es werden die besten *fünf* Aufgaben gewertet.
Die notierten *Punkte* (eingekreiste Zahlen) gibt es für *richtige* Lösungen mit begründeter Herleitung.
Gewertet werden nur Lösungen auf den Aufgabenblättern und dem ausgegebenen weißen Papier. Die gelben Konzeptblätter werden nicht berücksichtigt.
Für die **Note** *„sehr gut“ (1.0)* werden 45 Punkte, für die Note *„ausreichend“ (4.0)* 23 Punkte erwartet. (Theoretisch erreichbar sind 50 Punkte.)

Viel Erfolg!

Auswertung: **Auswertung:** **Auswertung:**

1	2	3	4	5	6	$\sum_{\text{beste 5}}$

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(1) Es sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Definiere, wann eine Teilmenge von $\mathfrak{V}$ eine *Basis* ist. Definiere alle Begriffe, die in dieser Definition vorkommen. (Der Begriff „Vektorraum“ muss nicht definiert werden.) ④

(b) Es sei $(v_1, \ldots, v_r)$ — mit einem $r \in \mathbb{N}$ — eine Basis von $\mathfrak{V}$ und

$$w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$$

mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ und $\lambda_1 \neq 0$.
Zeige, dass dann auch $(w, v_2, \ldots, v_r)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ ist. ⑥

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(2) Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die durch

$$\alpha : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

gegebene lineare Abbildung.

(a) Berechne

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

①

(b) Berechne die *Darstellungsmatrix* von α bezüglich der Basis

$$\mathcal{A} := \left(a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

⑨

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(3) (a) Es seien (mit einem $n \in \mathbb{N}$) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Gib eine Bedingung für $\det(A)$ an, die äquivalent dazu ist, dass die Gleichung

$$Ax = b$$

eindeutig lösbar ist. ①

(b) Bestimme jeweils p, $t \in \mathbb{R}$ so, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} px & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & t \\ x & + & 4y & + & 10z & = & t^2 \end{array}$$

(i) eine *eindeutige Lösung* hat,

(ii) *unendlich viele Lösungen* hat,

(iii) *keine Lösung* hat.

⑨

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(4) Es seien $\mathfrak{V}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\tau\colon \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeige, dass die durch $\alpha(x) := x - \tau(x)$ (für $x \in \mathfrak{V}$) gegebene Abbildung $\alpha\colon \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$ *linear* ist. ②

(b) Es seien

$$\mathfrak{W}_1 := \{x \in \mathfrak{V} \mid \tau(x) = x\}$$

und

$$\mathfrak{W}_2 := \{x - \tau(x) \mid x \in \mathfrak{V}\}.$$

Zeige, dass dies Vektorräume sind mit

$$\dim \mathfrak{W}_1 + \dim \mathfrak{W}_2 = \dim \mathfrak{V}.$$

③

(c) Es seien $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{V}$ und τ eine Isometrie bezüglich $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Zeige, dass dann für $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ gemäß (b)

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{W}_1 \oplus \mathfrak{W}_2$$

gilt. ⑤

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(5) (a) Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_2$. Berechne die *Determinante* der folgenden $(n \times n)$-Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

②

(b) Es sei

$$V_n := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeige per Induktion über n, dass

$$\det V_n = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

gilt. ⑧

Punkte:	Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

(6) Es seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\alpha\colon \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{W}$ eine lineare Abbildung.

(a) Gib jeweils eine Bedingung für den Kern oder das Bild von α an, die dazu äquivalent ist, dass

(i) α injektiv ist,

(ii) α surjektiv ist.

②

(b) Zeige, dass wenn $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$ endlich-dimensional ist, die Abbildung α genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist . ④

(c) Es seien nun $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ und $\mathfrak{V} := \mathfrak{W} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Gib jeweils eine Abbildung $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ an, die

(i) injektiv, aber nicht surjektiv ist,

(ii) surjektiv, aber nicht injektiv ist,

(iii) bijektiv ist und $\alpha \neq \mathrm{id}_{\mathfrak{V}}$,

(iv) weder injektiv noch surjektiv ist mit $\alpha \neq 0$.

④