Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

Es seien V ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\varphi\colon V \longrightarrow V$ ein *selbstadjungierter Endomorphismus* und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\varphi(U) \subset U$. Zeige: Dann ist $\varphi(U^\perp) \subset U^\perp$.

Aufgabe 10.2 (Normalität)

Zeige: Eine reelle 2×2-Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann normal, wenn $b = c$ ist oder $a = d$ und $b = -c$ gilt.

Aufgabe 10.3 (Kreuzprodukt)

Für Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ sei das *Vektorprodukt*, auch *Kreuzprodukt* genannt, definiert durch:

$$v \times w := \left(\det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \right)^T$$

Zeige:

(a) $w \times v = -(v \times w)$

(b) $v \times v = 0$

(c) Das Kreuzprodukt ist linear in beiden Variablen.

(d) $v \times w \perp v$, $v \times w \perp w$

(e) $e_1 \times e_2 = e_3$

(f) Das Kreuzprodukt ist *nicht* assoziativ.

(g) v, w linear abhängig $\iff v \times w = 0$

(h) Sind v, w linear unabhängig und $s \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle v, s \rangle = 0$ und $\langle w, s \rangle = 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$s = \lambda\,(v \times w)\,.$$

(i) Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\langle x, y \times z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.4 (Rotation und Spiegelung)

(a) Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ beschreibt

$$D(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

die *Rotation* um den Ursprung um den Winkel ϑ (erläutern!).

Zeige für $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$:

(i) $D(0) = I = \mathbb{1}_2$

(ii) $D(\vartheta_1) \cdot D(\vartheta_2) = D(\vartheta_1 + \vartheta_2)$

(iii) $D(\vartheta)$ ist invertierbar mit $D(\vartheta)^{-1} = D(-\vartheta)$

(iv) $(D(\vartheta))^n = D(n\,\vartheta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) Gib jeweils eine Matrix an, durch die die *Spiegelung* an

(i) der x-Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) der y-Achse $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$

(iii) der Winkelhalbierenden $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

im $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

Hinweis: Die folgenden Formeln (für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) dürfen ohne Beweis verwendet werden:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos\alpha = \cos(-\alpha), \quad (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Abgabe: **Freitag, 18. 01. 2013,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411
