**Universität Konstanz**

**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

# Lineare Algebra

## Übungsblatt 11

Es seien wieder — wie ‚immer' — $\mathbb{K}$ ein Körper und $n, m$ natürliche Zahlen.

### Aufgabe 11.1 (Symmetrische Gruppe)

Zeige, dass die symmetrische Gruppe $n$-ten Grades $\mathfrak{S}_n$ genau für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ ist. (Siehe Bemerkung 6.2.2 (c).)

### Aufgabe 11.2 (Parallelepiped)

Wir schließen an Aufgabe 10.3 — mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^3$ — an. Zeige für $v, w, z \in \mathbb{R}^3$:

$(j)$ $(i)$ $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$ , damit

$(ii)$ $\big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\|\,\|w\|$ , und

$(iii)$ $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\,\|w\|$ genau dann, wenn $v, w$ linear abhängig sind.

$(k)$ $\|v \times w\| = \|v\|\,\|w\| \cdot \sin \measuredangle(v, w)$ $\qquad$ ($v, w$ linear unabhängig)

$(l)$ Das Volumen des *Spats*, auch *Parallelepiped* oder *Parallelotop* genannt,

$$\big\{\lambda\, v + \mu\, w + \varrho\, z \mid 0 \leq \lambda, \mu, \varrho \leq 1\big\}$$

ist gerade durch $|\langle v \times w, z\rangle|$ gegeben. Die Größe

$$[v, w, z] := \langle v \times w, z\rangle$$

heißt *Spatprodukt.*

### Aufgabe 11.3 (Zerlegung in paarweise disjunkte Zyklen)

Es seien $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und

$$\mathrm{Fix}(\sigma) := \big\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\big\}$$

die Menge der *Fixpunkte* von $\sigma$. Zeige:

$(a)$ Zu $1 \leq i \leq n$ mit $i \notin \mathrm{Fix}(\sigma)$ gibt es genau einen $r$-Zyklus $\sigma_r := [i, i_1, \ldots, i_{r-1}]$ derart, dass $i_1, \ldots, i_{r-1} \notin \mathrm{Fix}(\sigma)$ und $\mathrm{Fix}(\sigma_r^{-1} \circ \sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma) \cup \big\{i, i_1, \ldots, i_{r-1}\big\}$.

$(b)$ Jedes $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ist Produkt aus paarweise disjunkten Zyklen. Hierbei heißen zwei Zyklen $[i_1, \ldots, i_r]$ und $[j_1, \ldots, j_s]$ *disjunkt,* falls $\{i_1, \ldots, i_s\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\} = \varnothing$.

$(c)$ Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

**Aufgabe 11.4 (Multilineare Abbildungen)**

Zeige, dass die folgenden Abbildungen multilineare Abbildungen sind:

(i) $\varphi\colon (\mathbb{R}^n)^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \varphi(v_1, \ldots, v_{2m}) := \prod_{i=1}^m \langle v_{2i-1}, v_{2i}\rangle$

(ii) $\varphi\colon (\mathbb{R}^{n\times n})^m \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \varphi(A_1, \ldots, A_m) := \operatorname{tr}\left(\prod_{i=1}^m A_i\right)$

(iii) $\varphi\colon V^n \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(v_1, \ldots, v_n) := \prod_{i=1}^n f_i(v_i)$. Dabei seien $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

Abgabe: **Freitag, 25. 01. 2013,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411