Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (Fredholm-Alternative)

Die folgende Aussage geht auf den schwedischen Mathematiker Eric Ivar Fredholm (1866–1927) zurück. Sie gibt — in einem einfachen Kontext — einen Zusammenhang zwischen der Lösung einer Operatorgleichung und der Lösung ihrer zugehörigen adjungierten Aufgabe:

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(\mathfrak{H}, \langle\ ,\ \rangle), (\mathfrak{K}, \langle\ ,\ \rangle)$ endlich-dimensionale Prä-Hilbert-Räume[1] über $\mathbb{K}$, $b \in \mathfrak{K}$ und $\varphi\colon \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{K}$ linear.

Die Gleichung $\varphi x = b$ ist genau dann lösbar, wenn für alle Lösungen y der homogenen adjungierten Aufgabe

$$\varphi^* y = 0$$

die Bedingung $\langle y, b\rangle = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 12.2 (Determinanten)

a) Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_2$. Berechne die *Determinante* der folgenden $(n \times n)$-Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Es sei — mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ —

$$V_n := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Zeige per Induktion über n:

$$\det V_n = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Dies zeigt, dass Methoden der Determinantenberechnung und dann der Eigenwertbestimmung (siehe Kapitel 7) mit denen zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms in Verbindung gebracht werden können.

[1] Wir unterscheiden also die beiden Skalarprodukte wieder nicht in der Notierung.

Aufgabe 12.3 (Determinanten)

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c)

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 16 & 0 & 27 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 12.4 (Vandermondsche Determinante; Interpolation)

a) Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $1+1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ und

$$V_n := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Zeige mit Induktion über n:

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

b) Es seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
Zeige: Es gibt genau ein Polynom der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\ldots)$$

mit $p(x_k) = y_k$ für $k = 1, \ldots, n+1$.

Abgabe: **Freitag, 01. 02. 2013,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411