Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

Berechne sämtliche Potenzen A^n und B^m (für $n, m \in \mathbb{N}$) der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -25 & 11 & -5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.2

Es sei $\mathbb{M}$ die folgende Menge von Matrizen

$$\mathbb{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Zeige, dass $\mathbb{M}$ mit der Matrixaddition $+$ und der Matrixmultiplikation $\cdot$ ein *Körper* ist.

b) Zeige, dass die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Matrixmultiplikation und -addition *keinen* Körper bildet.

(Hinweise: Wurde etwas bereits in der Vorlesung gezeigt, darfst du auf den entsprechenden Satz verweisen.
Um die Kommutativität *zu zeigen, nimm zwei Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

und berechne AC und CA.

Um zu zeigen, dass jedes Element von $\mathbb{M} \setminus \{0\}$ ein Inverses *hat, nimm eine Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

die nicht gleich Null ist (also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) und zeige, dass

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

gilt.)

Aufgabe 2.3

Betrachte
$$\mathbb{Z}_7 := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{6}\}$$
mit der in der Vorlesung gegebenen Addition und Multiplikation. Zeige zunächst, dass diese *wohldefiniert* sind: Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ folgen aus $\overline{a} = \overline{b}$ und $\overline{c} = \overline{d}$ stets $\overline{a+c} = \overline{b+d}$ und $\overline{a \cdot c} = \overline{b \cdot d}$.

a) Berechne

(*i*) $\overline{4} + \overline{6}$

(*ii*) $\overline{3} \cdot \overline{6}$

(*iii*) $\begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{6} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \end{pmatrix}$, wobei die Matrixmultiplikation genauso wie für reelle Matrizen definiert ist.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}_7$ mit der in der Vorlesung gegebenen Addition und Multiplikation ein *Körper* ist.

Bemerkung: Wir können uns die Elemente von $\mathbb{Z}_7$ gut als Wochentage vorstellen. Ist $\overline{0}$ = Montag, $\overline{1}$ = Dienstag, …, $\overline{6}$ = Sonntag, *können wir die Gleichung* $\overline{2} + \overline{6} = \overline{1}$ *wie folgt verstehen: Wenn heute Mittwoch ist, dann ist in sechs Tagen Dienstag. Bei dieser Interpretation sind dann Formulierungen wie* 5 mal 5 ist Freitag *oder* Donnerstag mal Freitag ergibt Samstag *gar nicht mehr unsinnig …*

Aufgabe 2.4

Beweise — nach dem Muster der entsprechenden Beweise in der Vorlesung — die verbleibenden Aussagen (α), (β), (γ), (ε) und (ϑ) über das *Bruchrechnen.*

Abgabe: **Freitag, 09. 11. 2012,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411