Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Es seien A eine nicht-leere Menge, $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:
Die Menge $Abb(A, V)$ der Abbildungen $f\colon A \longrightarrow V$ bildet mit der *elementweise* definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x)+g(x) \\ (\lambda.g)(x) &:= \lambda.g(x) \qquad (f,g \in Abb(A,V), \lambda \in \mathbb{K}, x \in A) \end{aligned}$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Aufgabe 3.2

Es seien $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein *Körper* und $M \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge (d. h. jedes Element von M ist auch in $\mathbb{K}$). Zeige:

a) Das Tripel $(M, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wir sagen dann *Teilkörper (von $\mathbb{K}$),* wenn gilt:
   i) $\forall\,(m_1, m_2) \in M \times (M \setminus 0)$: $\quad m_1 - m_2 \in M$, $m_1 \cdot m_2^{-1} \in M$
   ii) $0 \in M$ und $1 \in M$

b) $\mathbb{Q}$ ist der einzige Teilkörper von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3.3

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U, W Unterräume von V.

a) Gib ein Beispiel an, für das $U \cup W$ *kein* Unterraum ist.

b) Zeige: $U \cup W$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$ gilt.

Aufgabe 3.4

Es sei $V := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Definiere für alle $x, y \in V$

$$x \oplus y := x \cdot y$$

und für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $x \in V$

$$\alpha \otimes x := x^\alpha.$$

Zeige oder widerlege, dass $(V, \oplus, \otimes)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

Abgabe: **Freitag, 16. 11. 2012,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411
