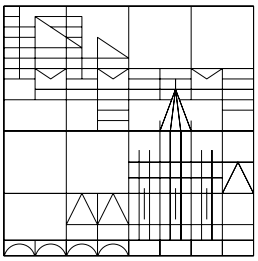
**Universität Konstanz**

**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel



# Lineare Algebra

## Übungsblatt 4

### Aufgabe 4.1

(*a*) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^4$ in üblicher Weise als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Teilmengen von $V$ sind *linear unabhängig?*

(*i*) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(*ii*) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(*b*) Es sei $W$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von $W$ sind *linear unabhängig?*

(*i*) $\left\{ (\cos(x))^2, 1, (\sin(x))^2 \right\}$

(*ii*) $\{\sin(x), \cos(x), x^2\}$

(*iii*) $\{f_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit $f_r(x) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < r; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

Hier ist natürlich etwa $(\cos(x))^2$ eine laxe Notierungsweise für die *Funktion* aus $W$, die jedem $x \in \mathbb{R}$ gerade diesen Wert zuordnet

(*c*) Es seien $X$ und $Y$ linear unabhängige Teilmengen eines Vektorraumes $V$. Keines der Elemente von $X$ sei eine Linearkombination von Elementen aus $Y$ und keines der Elemente von $Y$ sei eine Linearkombination von Elementen aus $X$. Zeige oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel): Die Menge $X \cup Y$ ist *linear unabhängig.*

### Aufgabe 4.2

Es sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset V$ ein Unterraumm.

(*a*) Zeige: Es gibt einen Unterraum $U' \subset V$ mit $U \cap U' = \{0\}$ derart, dass $V = U + U'$. Man nennt $U'$ ein *Komplement* von $U$.

(*b*) Es sei $U \neq U_1 \subset V$ ein weiterer Unterraum von $V$ mit $\dim(U_1) = \dim(U)$. Zeige: Es gibt einen Unterraum $U'$ derart, dass $U \cap U' = U_1 \cap U' = \{0\}$ und $U + U' = U_1 + U' = V$.

**Aufgabe 4.3**

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $V$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Darin sei $P_n \subset V$ die Menge der *polynomialen Funktionen* von Grad $\leq n$, also
$P_n = \{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha_n \cdot x^n + \cdots + \alpha_0$ für gegebene $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (und alle $x \in \mathbb{R})\}$

(*a*) Zeige, dass $P_n$ ein *Untervektorraum* von $V$ ist.

(*b*) Zeige, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_n^r = \{f \in P_n \mid f(r) = 0\}$$

ein *Untervektorraum* von $P_n$ ist.

(*c*) Gib für $U_n^0$, $U_n^1$, $U_n^0 + U_r^1$ und $U_n^0 \cap U_n^1$ jeweils eine *Basis* und die *Dimension* an.

**Aufgabe 4.4**

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(*a*) $F \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x, y, z) := (x, y)$.

(*b*) $F \colon V \longrightarrow V$, definiert durch $F(x) := -x$, wobei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum sind.

(*c*) $F \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch $F(x, y, z) := (x, y, z) + (0, 1, 0)$.

(*d*) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x, y) := (2x + y, y)$.

(*e*) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x, y) := (y, x)$.

(*f*) $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $F(x, y) := xy$.

---

Abgabe: **Freitag, 23. 11. 2012,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411