Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

(a) Es seien V ein *endlich-dimensionaler* Vektorraum über einem Körper K und $\alpha\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i) α ist injektiv.
- ii) α ist surjektiv.
- iii) α ist bijektiv.

(b) Wir betrachten nun den $\mathbb{R}$-Vektorraum $F := \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ der Folgen reeller Zahlen.

- i) Gib ein Beispiel für eine lineare Abbildung $\beta\colon F \longrightarrow F$, die injektiv und *nicht* surjektiv ist.
- ii) Gib ein Beispiel für eine lineare Abbildung $\gamma\colon F \longrightarrow F$, die surjektiv und *nicht* injektiv ist.

Aufgabe 5.2 (Komplexe Zahlen)

Nach Übungsaufgabe (2.2.a) wissen wir, dass

$$\mathbb{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Addition und der Multiplikation von Matrizen ein *Körper* ist. Zeige für die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \ni a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathbb{I}_2 \in \mathbb{M} :$$

- i) φ ist injektiv.
- ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- iii) Mit

$$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gelten: $j^2 = \varphi(-1)$ und $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi(a) + j\,\varphi(b)$.

Nach i) und ii) kann man $a \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) \in \mathbb{M}$ ‚identifizieren'. Dann gelten also:

$$j^2 = -1 \text{ und } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + j\,b \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.3 (Vollständige Induktion)

(a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_3$ gilt $n^2 - 2n - 1 > 0$.

(b) Es sei

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 - 2n & -4n \\ n & 1 + 2n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.4 (Direkte Summe)

Es seien V ein Vektorraum und $W_1, \ldots, W_r$ Untervektorräume von V. Zeige:

V ist genau dann die *direkte Summe* der Untervektorräume $W_1, \ldots, W_r$ wenn gilt:

(i) $V = W_1 + \cdots + W_r$ und

(ii) $\forall w_1 \in W_1 \setminus \{0\} \ldots \forall w_r \in W_r \setminus \{0\}$ gilt:
$w_1, \ldots, w_r$ sind linear unabhängig.

Definiere dazu zunächst die direkte Summe von r Unterräumen

$$\bigoplus_{\varrho=1}^{r} W_\varrho = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

geeignet.