Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (Gruppen)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e.

(a) G habe n Elemente. Zeige, dass dann zu jedem $g \in G$ ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $m \leq n$ und $g^m = e$ gelten.

(b) Zeige, dass G kommutativ ist, falls für $g \in G$ stets $g^2 = e$ ist.

Aufgabe 6.2 (Darstellende Matrix)

Es sei P_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der polynomialen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ in der Variablen x, vom Grad kleiner oder gleich n (siehe Aufgabe 4.3).

(a) Zeige, dass die Differentation nach x, $\frac{d}{dx}$, eine lineare Abbildung von P_n nach P_n ist. Dabei definieren wir

$$\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) := n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

(b) Es seien $\mathfrak{B}_1 = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathfrak{B}_2 = (1, x-1, x^2+x-1, x^3-3x-2)$. Dies sind Basen von P_3 (das muss nicht gezeigt werden). Berechne die *darstellende Matrix* von $\frac{d}{dx}$ bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$.

Aufgabe 6.3 (Lineare Abbildungen)

Es seien K ein Körper und U, V, W K-Vektorräume. Zudem seien $\alpha\colon U \longrightarrow V$ und $\beta\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

(a) Wenn α und β injektiv sind, dann ist auch $\beta \circ \alpha$ injektiv.

(b) Wenn α und β surjektiv sind, dann ist auch $\beta \circ \alpha$ surjektiv.

(c) Ist $\beta \circ \alpha$ injektiv, dann ist auch α injektiv.

(d) Ist $\beta \circ \alpha$ surjektiv, dann ist auch β surjektiv.

Aufgabe 6.4 (Lineare Abbildungen)

Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

(a) Zeige: $V = \operatorname{im}\varphi \oplus \ker\varphi$

(b) Gib ein Beispiel für ein $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{im}\psi + \ker\psi \subsetneq \mathbb{R}^3$.

Abgabe: **Freitag, 7. 12. 2012,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411
