Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 Diagonalisierbarkeit

(a) Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ derart, dass

$$S^{-1}AS =: D$$

eine Diagonalmatrix ist. Zeige für $\nu = 1, \ldots, n$ und die ν-te Spalte S_ν von S, dass

$$AS_\nu = \lambda^\nu S_\nu$$

mit dem ν-ten Diagonalelement λ^ν von D gilt.

Wir sagen: A ist *diagonalisierbar*, und S_ν ist ein *Eigenvektor* zum *Eigenwert* λ^ν von A.

(b) Zeige für $\lambda \in \mathbb{K}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

dass A *nicht* diagonalisierbar ist.

Aufgabe 7.2 Transformationsabbildungen

Es seien $\mathcal{A} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} := \left(b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Schreibe die Elemente der Basis $\mathcal{A}$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}$ und die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{A}$.

(b) Berechne die Transformationsabbildungen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(c) Was ist das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 7.3 Basiswechsel

Es seien wieder P_3 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der polynomialen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ in der Variablen x vom Grad kleiner oder gleich 3 und dazu $\mathfrak{B}_1 := (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathfrak{B}_2 := (1, x-1, x^2+x-1, x^3-3x-2)$ zwei Basen des P_3. Wir betrachten (vgl. Aufgabe 6.2) die lineare Abbildung $D := \frac{d}{dx}$ (Differentiation nach x).

(a) Berechne die Basiswechselmatrizen $T_{\mathfrak{B}_2}^{\mathfrak{B}_1}$ und $T_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2}$.

(b) Berechne $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}_2}^{\mathfrak{B}_1}(D)$.

Es dürfen natürlich stets Ergebnisse aus den vorigen Blättern verwendet werden.

Aufgabe 7.4 Darstellungsmatrizen

Es seien φ und ψ lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Bezüglich der Basis $\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ habe φ die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, und bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ habe ψ die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Darstellungsmatrix von $\pi.\varphi - \psi$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Berechne die Darstellungsmatrix von $\psi \circ \varphi$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Abgabe: **Freitag, 14. 12. 2012,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411