



Lineare Algebra

Übungsblatt 8

Es seien natürlich — wie ‚immer‘ — $\mathbb{K}$ ein Körper und n eine natürliche Zahl.

Aufgabe 8.1 Quotientenräume

- (a) Es seien V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V mit $V = U \oplus W$.
Zeige: Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : V/U \longrightarrow W$.
- (b) Es sei P_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$, $r \in \mathbb{R}$ und
 $U_n^r := \{f \in P_n \mid f(r) = 0\}$ der aus Aufgabe 4.3 bekannte Unterraum von P_n .
Zeige: Es ist $P_n/U_n^r \cong \mathbb{R}$.

Aufgabe 8.2 Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Entscheide, ob die folgenden Abbildungen Skalarprodukte, Semiskalarprodukte oder keines von beiden sind.

- (a) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3$
für $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $y = (y_1, y_2, y_3)^T$.
- (b) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - 4x_3y_3$
für $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $y = (y_1, y_2, y_3)^T$.
- (c) Es seien $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB) := \sum_{i=1}^n (AB)_i^i$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Aufgabe 8.3 Normen und Halbnormen

Es seien V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf V . Zeige:

- (a) $U := \{v \in V : \|v\| = 0\}$ ist ein Unterraum von V .
- (b) $\|\cdot\|$ ist genau dann eine Norm, wenn $U = \{0\}$ gilt.
- (c) $\|[w]\| := \|w\|$ für $w \in [w] \in V/U$ definiert eine Norm auf V/U .

Aufgabe 8.4 Weihnachtsaufgabe

Der Weihnachtsmann will natürlich auch all die fleißigen Hörerinnen und Hörer, Übungsleiterinnen und Übungsleiter und — nicht zu vergessen! — die Aufgabensteller unserer Vorlesung großzügig beschenken. Dazu braucht er aber Hilfe bei der folgenden Aufgabe: Jedem werde sein Geburtsdatum in der Form *Tag* (zweistellig), *Monat* (zweistellige Zahl) und *Jahr* (vierstellig) als Vektor des $\mathbb{R}^8$ zugeordnet, also zum Beispiel für den Dozenten

$$g := (g_1, \dots, g_8)^T := (0, 8, 0, 8, 1, 9, 4, 3)^T.$$

Mit einem Geschenkevektor $(c_1, \dots, c_8)^T \in [0, \infty)^8$ werde so individuell — in irgendeiner passenden Einheit (z.B. EURO oder auch Goldbarren) — das Geschenk

$$\langle g, c \rangle := \sum_{\nu=1}^8 c_\nu g_\nu,$$

also mit dem *Standard-Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^8$, gebildet.

Bestimme den Geschenkevektor c^* mit $\|c^*\| = 2012$ so, daß der Dozent — verdienentermaßen — das größtmögliche Geschenk bekommt. ☺

Natürlich bezeichnet hier $\| \cdot \|$ die zu dem Standard-Skalarprodukt gebildete Norm.

Was bekommst Du mit diesem Geschenkevektor c^* ?

