Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Dieter Hoffmann

Sebastian Wenzel

Lineare Algebra

Übungsblatt 9

Es seien wieder — wie ‚immer' — $\mathbb{K}$ ein Körper und n eine natürliche Zahl.

Aufgabe 9.1 Matrix des Skalarproduktes

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit darstellender Matrix C bezüglich der Standardbasis. Zeige:

(a) Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$, so ist $\langle v, w \rangle = v^T C w$.

(b) Ist $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine weitere Matrix mit $M^T = M$, so liefert $\langle v, w \rangle_M := v^T M w$ genau dann ein Semiskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn $v^T M v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist.

(c) Ist in (b) zusätzlich der Zeilenrang von M gleich der Dimension n des Vektorraums, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ ein Skalarprodukt.

Aufgabe 9.2 Orthogonales Komplement

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt und W_1 und W_2 Unterräume von V. Zeige:

(a) Ist $W_1 \subset W_2$, so ist $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

(b) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(c) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Aufgabe 9.3 Gram-Schmidt-Verfahren

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^4$ mit

$$a := (2, 2, 0, 1)^T,\ b := (2, 1, 0, 0)^T,\ c := (2, 0, -1, 1)^T.$$

Benutze das im Beweis von Satz 5.2.1 beschriebene Gram-Schmidt-Verfahren, um ein Orthonormalsystem (A, B, C) — bezüglich des Standardskalarprodukts — für $U := \langle a, b, c \rangle$ zu finden.

Aufgabe 9.4

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $T \colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

(a) Für alle $x \in V$ sei $||T(x)|| = ||x||$.

Zeige, dass $\langle Tx, Ty \rangle + \langle Ty, Tx \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.

Hinweis: *Füge an geeigneter Stelle* $||T(x - y)||$ *ein.*

(b) Zeige, dass genau dann $||T(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ gilt, wenn $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$ ist.

Hinweis: *Ist $z = a+ib$ eine komplexe Zahl, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $\Re(z) := a$ für den Realteil von z und $\Im(z) := b$ für den Imaginärteil von z. Benutze die Formeln $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ und die Gleichung aus (a), um zu zeigen, dass $\Re\langle Tx, Ty\rangle = \Re\langle x, y\rangle$. Zeige dann, indem du y durch iy ersetzt, dass $\Im\langle Tx, Ty\rangle = \Im\langle x, y\rangle$.*

Wir wünschen Euch allen besinnliche und frohe Weihnachtstage und dazu ein erfolgreiches neues Jahr!

„Ich weiß nicht, ob es besser wird, wenn es anders wird.
Aber es muß anders werden, wenn es besser werden soll.“
(Georg Christoph Lichtenberg)

Abgabe: **Freitag, 11. 01. 2013,** bis 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F 411
