DIETER HOFFMANN

SPLINE-INTERPOLATION · DIE KUNST, IN WERTETABELLEN ZWISCHEN DEN ZEILEN ZU LESEN

KONSTANZER UNIVERSITÄTSREDEN

KONSTANZER UNIVERSITÄTSREDEN
HERAUSGEGEBEN VON GERHARD HESS

110

DIETER HOFFMANN

SPLINE-INTERPOLATION

DIE KUNST, IN WERTETABELLEN ZWISCHEN DEN ZEILEN ZU LESEN

DIETER HOFFMANN

SPLINE-INTERPOLATION · DIE KUNST, IN WERTETABELLEN ZWISCHEN DEN ZEILEN ZU LESEN

1978

UNIVERSITÄTSVERLAG KONSTANZ GMBH

ISBN 3 87940 134 9

Gesamtherstellung: Universitäts-Druckerei Konstanz GmbH
Konstanz Am Fischmarkt

In Bezug auf eine Antrittsvorlesung haben nicht wenige Mathematiker dieser Universität Enthaltsamkeit geübt; da mir die neue Habilitationsordnung das Abhalten einer öffentlichen Antrittsvorlesung vorschreibt, mußte ich gar nicht erst darüber nachdenken, ob ich mich dieser Abstinenz-Tradition verpflichtet fühlen sollte.

Die geringe Bereitschaft der Mathematiker, einen solchen Vortrag für die breite Öffentlichkeit zu halten, ist gewiß zum Teil darin begründet, daß es gerade in der Mathematik sehr schwierig, oft - so meine ich - sogar unmöglich ist, über eigene Forschungsergebnisse angemessen zu berichten, wenn man dabei auch Nichtfachleute ansprechen und ihnen verständlich sein will. Daher werde auch ich dies heute nicht tun.

Eine andere Möglichkeit zur Gestaltung der Antrittsvorlesung wäre die folgende: Man wühlt in der mathematischen Mottenkiste und sucht nach einem gut zu verkaufenden Thema der mathematischen Folklore, das man dann semi-humoristisch aufmacht. Auch das will ich nicht tun, sondern schlicht - unter bewußtem Verzicht auf gehaltlose Show-Effekte - ein Beispiel einer Vorlesung geben, und zwar über ein Thema, das ich in einer Veranstaltung über Numerik in diesem Semester auch kurz behandelt habe. Allerdings habe ich das Ganze schon etwas verbraucherfreundlich aufbereitet, damit auch diejenigen, die der Mathematik nur einen von leichtem Gruseln durchsetzten Respekt entgegenbringen können, nicht mit allergischen Reaktionen nach Hause gehen müssen. Vorweg bitte ich deshalb die mathematisch versierten Zuhörer um etwas Nachsicht, weil ich sie weder mit trickreichen Beweisen noch mit komplizierten Formeln beglücken werde.

Ein Thema aus der Numerischen Mathematik schien mir für diesen Vortrag deshalb angebracht, weil die Numerik zu den mathematischen Disziplinen gehört, deren Ergebnisse in besonderem Maße in anderen Wissenschaften wirksam werden. Sie schlägt die Brücke zwischen den grundlegenden Begriffen und Modellen der Mathematik und ihren Anwendungen in Naturwissenschaft, Technik, Ökonomie und andere Bereichen. Durch die explosionsartige Entwicklung der Leistungsfähigkeit programmgesteuerter elektronischer Rechenanlagen - ohne die zum Beispiel die spektakulären Erfolge der Raumfahrt in den letzten Jahren nicht möglich gewesen wären - ist der Numerischen Mathematik eine neue Dimension erschlossen worden. Sie hat dadurch an Bedeutung und Anziehungskraft gewaltig zugenommen.

Speziell habe ich eine Fragestellung aus dem verhältnismäßig jungen Gebiet der Spline-Funktionen ausgewählt, weil diese Funktionen - basierend auf einer sehr einfachen Idee - gewisse mathematische Eigenschaften haben, die sie wohl mit in das Zentrum der zukünftigen Entwicklung in einigen Gebieten der Angewandten Mathematik und der Numerischen Analysis stellen werden.

Der für Kenner informative Teil des gewählten Titels heißt Spline-Interpolation; lassen Sie mich daher zunächst etwas über Interpolation im allgemeinen sagen:

INTERPOLATION

Mit der Interpolationsaufgabe sind die meisten seit der ersten Bekanntschaft mit der Logarithmentafel vertraut: Gesucht sei zum Beispiel der dekadische Logarithmus von 1.0125. Zur Verfügung stehe eine vierstellige Tafel. Tabelliert ist als nächst kleinerer Wert lg 1.012 mit 0.0052, als nächst größerer Wert lg 1.013 mit 0.0056. Da 1.0125 genau in der Mitte zwischen den beiden Tabelleneingängen liegt, nimmt man als zugehörigen Logarithmus das arithmetische Mittel aus 0.0052 und 0.0056, also 0.0054. Geometrisch bedeutet das: Wir ersetzen zwischen den beiden

Stützpunkten mit den Koordinaten (1.012,0.0052) und (1.013,0.0056) die Logarithmenkurve durch eine Gerade. Stark vergröbert gezeichnet sieht das ungefähr so aus:

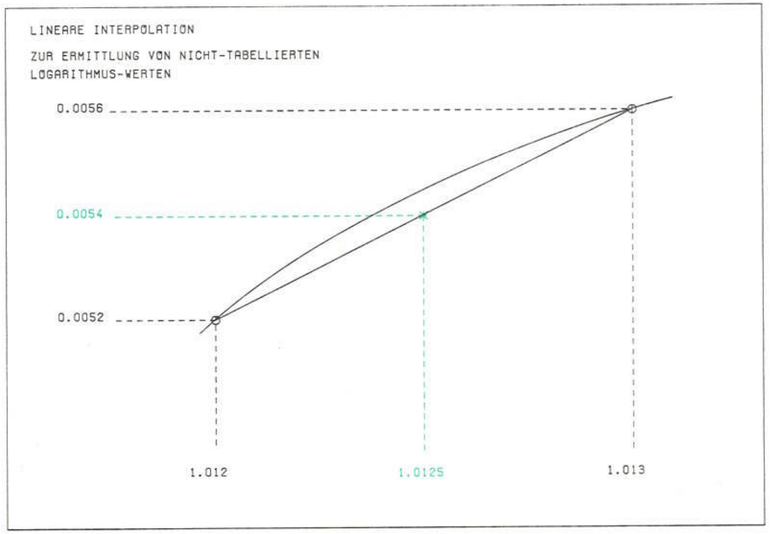

Abbildung Nr. 1

Die Wahl einer Geraden, das heißt einer linearen Funktion, als Ersatzfunktion für die Logarithmusfunktion ist zunächst willkürlich. Dieses Vorgehen - "lineare Interpolation" - ist offenbar nur solange unbedenklich, als die Abweichung der gekrümmten Kurve von der Sehne im Rahmen der geforderten Genauigkeit nicht ins Gewicht fällt.

Heute hat dieses Verfahren (der linearen Interpolation) zur Gewinnung von Funktionswerten völlig an Bedeutung verloren, weil Computer, ja selbst winzige Taschenrechner die benötigten Funktionswerte mit anderen Methoden direkt mit Hilfe von Unterprogrammen berechnen.

Lassen Sie mich für all diejenigen, die mit dem Logarithmus keine allzu enge Freundschaft verbindet, ein noch einfacheres Beispiel geben:
Jemand in der Familie ist krank; man mißt die Körpertemperatur und notiert die Werte in Form einer Wertetabelle, zum Beispiel die untenstehenden. Zur besseren Übersicht zeichnet man meist eine Fieberkurve, in dem man die gemessenen Fieberwerte über der entsprechenden Zeit einträgt und dann wohl üblicherweise die Punkte durch Geradenstücke verbindet (so etwas nennen die Mathematiker einen "Polygonzug").

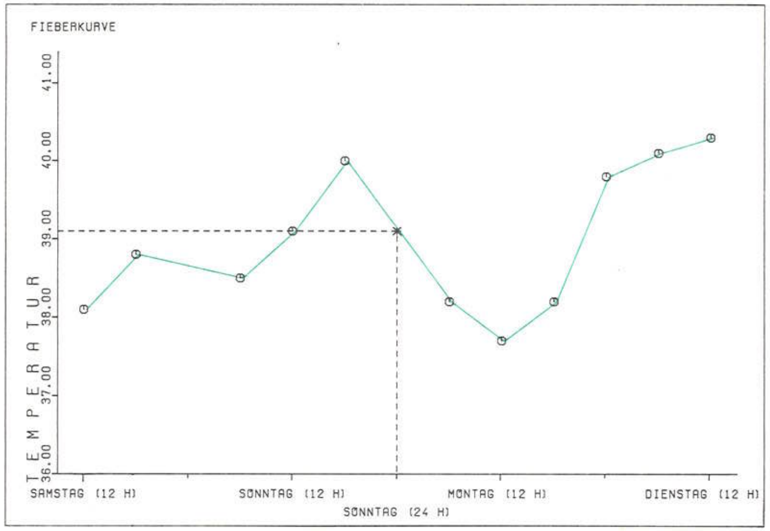

Abbildung Nr. 2

Damit möchte man dann wohl ausdrücken, daß sich das Fieber in etwa so entwickelt hat, also zum Beispiel in der Nacht von Sonntag auf Montag gegen 24 Uhr den Wert 39.1° hatte. In der Wertetabelle entspricht diesem Vorgehen das "L e s e n z w i s c h e n d e n Z e i l e n" in folgendem Sinne: Der Zeitwert Sonntag 24 Uhr liegt genau in der

Mitte zwischen Sonntag 18 Uhr und Montag 6 Uhr, die zugehörigen Fieberwerte sind 40° und 38.2°, das arithmetische Mittel davon ist 39.1°, und dies nimmt man dann als Fieberwert für Sonntag 24 Uhr.

Wir werden uns im folgenden stärker an die graphische Darstellung halten, weil bildliche Darstellungen oft viel wirksamer Information vermitteln als Zahlenkolonnen oder verbale Erklärungen und auch viel schneller erfaßt werden können.

Die Verbindung durch Geraden ist natürlich auch hier ziemlich aus der Luft gegriffen; insbesondere ist keineswegs einzusehen, weshalb die Fieberentwicklung gerade in den Zeitpunkten der Messung die Richtung ändern und dadurch so eckig aussehen soll. Viel wahrscheinlicher ist doch irgendein glatter Verlauf, zum Beispiel dieser grün eingezeichnete; möglich wäre aber auch dieser schwarz eingezeichnete.

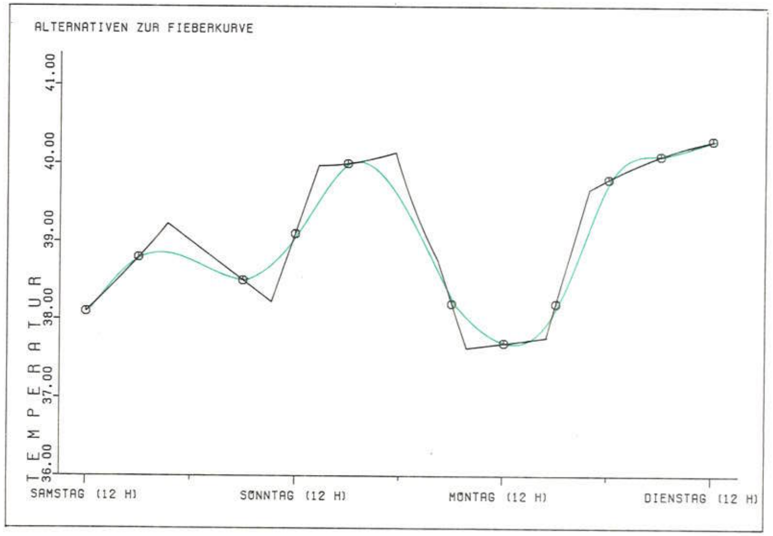

Abbildung Nr. 3

Manche, auch unter denen, die 'stolz' auf eine "5" in Mathematik sind, interpolieren schon morgens vor dem Frühstück: Nehmen wir eine junge Dame, knapp über ihrem Idealgewicht, das sie mit 80 kg angibt, die sich nach opulentem Nachtmahl morgens auf die Badezimmerwaage wagt, den Zeiger etwa hier findet

```
|          |        ↑ |
81                   82
```

und ihr Gewicht mit 81.825 kg abliest.

Sie hat damit - bis auf die übertriebene Genauigkeit - richtig linear interpoliert. Bei einer guten Waage ist der Zeigerausschlag proportional zur Belastung der Waage; hier gibt es also keinerlei Probleme.

Kommen wir zu unserer Fieberkurve zurück!
Wir abstrahieren ein wenig von dieser speziellen Situation und haben dann folgendes Problem:

(*) | Gegeben sind eine natürliche Zahl n, paarweise verschiedene Argumente $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und dazu Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Gesucht ist eine Funktion f, die die Bedingung $f(x_j) = y_j$ erfüllt. [1]

Ich denke, daß Sie alle aus Ihrem persönlichen Bereich genügend passende Beispiele kennen, zum Beispiel: Bevölkerungsentwicklung, Ort-Zeit-Diagramme (Entfernung, die beispielsweise ein Zug nach einer bestimmten Zeit zurückgelegt hat), Entwicklung der Lebenshaltungskosten, Kennlinie $(U = f(i)$ oder $i = g(U))$.

Man nennt die x_j "Stützstellen", die y_j "Stützwerte" und die (x_j, y_j) "Stützpunkte" oder "Knoten".

1 In unserem Beispiel sind $n = 10$, x_j die Zeitpunkte, y_j die Temperaturwerte und f die Funktion, die den wirklichen Fieberverlauf beschreibt.

Eine eindeutige und genaue Rekonstruktion einer Funktion aus solchen Angaben ist im allgemeinen nicht möglich; als Fieberkurve hatten wir zum Beispiel drei Möglichkeiten eingezeichnet - natürlich kann man beliebig viele angeben. Man muß sich mit einer "Ersatzfunktion" g begnügen, die $g(x_j) = y_j$ ("Interpolation") erfüllt, und hofft, daß g - wenigstens in einem gewissen Bereich - f näherungsweise beschreibt.

Anschaulich geometrisch gesprochen: Gesucht sind Kurven, die durch vorgegebene Punkte verlaufen und nicht zu sehr von der 'richtigen' Kurve abweichen.

Forderungen, die man dabei an g stellen wird, sind mindestens:

a) $g(x)$ soll für $x \neq x_j$ 'leicht'[2] zu berechnen sein,
b) $g(x)$ soll für $x \neq x_j$ 'vernünftige' Werte annehmen und oft auch
c) g soll "glatt" sein (Die zugehörige Kurve soll keine Sprünge und keine, zumindest nicht zu viele, Ecken haben.)

Was 'vernünftig' ist, kann von Problem zu Problem verschieden sein, und wird meist nicht befriedigend präzisiert werden können; wir werden aber nachher Beispiele sehen, wo offensichtlich höchst unvernünftig interpoliert wird. (In unserem Fieberproblem wäre beispielsweise ein Zwischenwert 87° oder -3° offenbar unsinnig; ein Interpolationsverfahren, welches solche Werte liefert, wäre also hier unbrauchbar.)
Häufig hat man ein auf Erfahrung beruhendes Gefühl, ob die konstruierte Ersatzfunktion eine brauchbare Näherung ist.

2 Was 'leicht' ist, hängt natürlich von den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln ab; bedeutet für Rechnungen auf dem Computer auch 'numerisch gutartig'.

Will man sich nicht damit begnügen, so gibt es folgende Möglichkeit, Aussagen über den Interpolationsfehler zu gewinnen und damit verschiedene Interpolationsverfahren vergleichen zu können: Man nimmt eine bekannte Funktion f, markiert auf ihrem Schaubild verschiedene Punkte, und überprüft, wie gut die Interpolationsfunktion zu diesen Punkten f wiedergibt. Wir versuchen also f aus Werten $f(x_i)$, die an diskreten Stellen gegeben sind, zu rekonstruieren.

Für einen präzisen Vergleich müßten wir eigentlich überlegen, wie Abweichungen zwischen zwei Funktionen gemessen werden sollen: Nimmt man zum Beispiel den Flächeninhalt zwischen den zugehörigen Kurven als 'Maß' für den Abstand, dann liegt in der untenstehenden Abbildung g (gestrichelt) näher an f (grün) als h (schwarz) ; nimmt man aber etwa die Maximalabweichung als 'Maß', dann liegt h näher an f als g.

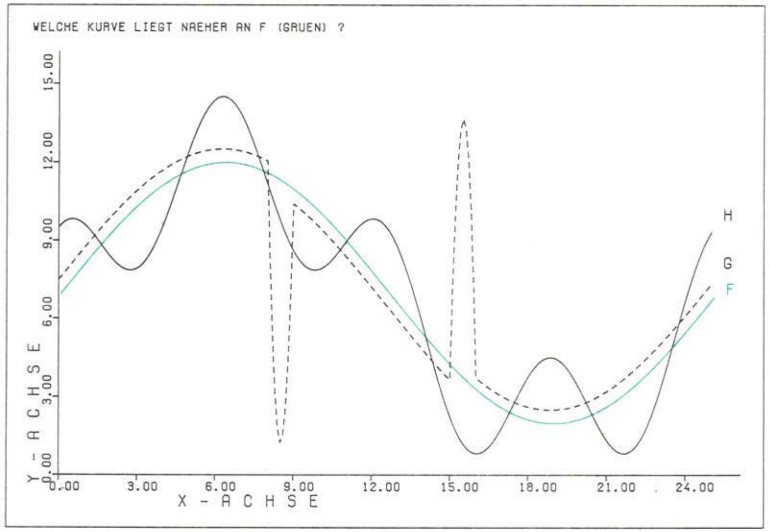

Abbildung Nr. 4

Was das geeignetste 'Maß' ist, hängt vom jeweiligen Problem ab, ist aber für unsere Beispiele nicht relevant.

P O L Y N O M - I N T E R P O L A T I O N

Die Forderungen a) ('leicht' zu berechnen) und c) ("Glattheit") werden im besonderen Maße durch Polynome erfüllt. Diese haben daher lange Zeit eine hervorragende Rolle bei der Approximation durch Interpolation gespielt. Deshalb möchte ich auch etwas zur Interpolation durch Polynome sagen.

Vielleicht sollte ich vorweg für die mathematisch weniger Vorbelasteten kurz sagen, was P o l y n o m e sind:
Es sind Funktionen der einfachen Bauweise

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit gewissen reellen Zahlen a_j.
Ist $a_n \neq 0$, so heißt P Polynom "n-ten G r a d e s".

Die Schaubilder typischer Vertreter sehen ausschnittsweise zum Beispiel ungefähr so aus:

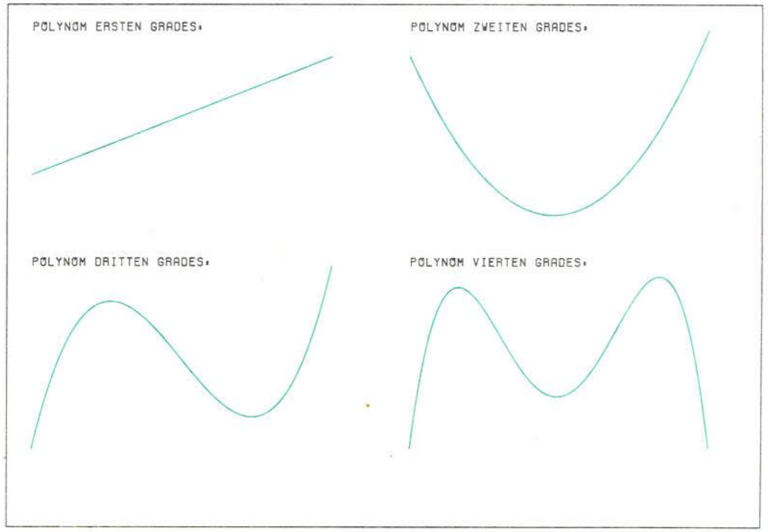

Abbildung Nr. 5

Was man vielleicht für das folgende beachten und behalten sollte, ist: Ein Polynom n-ten Grades hat bis zu n-1 Extremstellen (Beulen, Buckel).

Ein numerisch geeignetes Verfahren zur Auswertung von Polynomen, das zugleich schnell und ökonomisch ist, wird nach HORNER benannt: Für das Polynom 4. Grades $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 10x + 12$ ermittelt man den Wert an der Stelle α, indem man umschreibt $P(\alpha) = (((2\alpha - 3)\alpha + 5)\alpha - 10)\alpha + 12$ und dann - beispielsweise für $\alpha = 2$ - wie folgt rechnet:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
+ & 2 & -3 & 5 & -10 & 12 \\
  & \| & 4 & 2 & 14 & 8 \\
\hline
\cdot 2: & 2 & 1 & 7 & 4 & 20
\end{array}
= P(2).
$$

Man zeigt nun sehr einfach:

> Zu (*) existiert genau ein Polynom P höchstens n-ten Grades mit $P(x_j) = x_j$ $(j = 0, \ldots, n)$.
> ("Interpolations-Polynom" zu (*).)

Die Bedeutung der Interpolations-Polynome liegt heute allein noch auf rein theoretischem Gebiet (Numerische Integration, Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation (z.B. ROMBERG-Verfahren)); dennoch widmen manche Autoren von Büchern über Numerische Mathematik diesem Kapitel übermäßig viele Seiten, ohne die angebrachten Warnungen vernehmbar auszusprechen.

Ich möchte Sie von der weitgehenden Unbrauchbarkeit im Hinblick auf die von uns angeschnittene Fragestellung überzeugen:

Schon das erste Beispiel ($f(x) := \sqrt[4]{x}$, 9 äquidistante Stützstellen im Intervall [0,3.2]) mahnt zur Vorsicht:

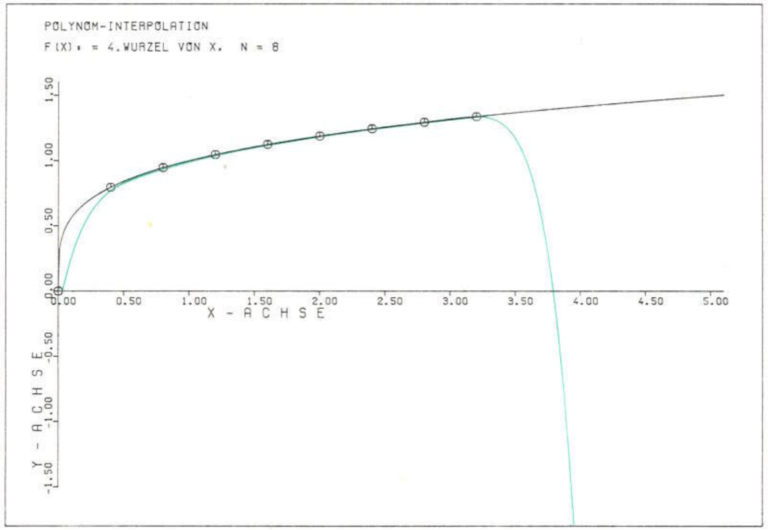

Abbildung Nr. 6

Die Approximation ist hervorragend im Innern, schlecht zum (linken) Rand hin und wird außerhalb der Knoten (rechts von 3.2) ("Extrapolation") völlig unbrauchbar.
Ein weiteres - klassisches - Beispiel wird durch die Testfunktion $f(x) := 1/(1 + x^2)$ im Intervall [-5,5] bei äquidistanten Stützstellen geliefert:

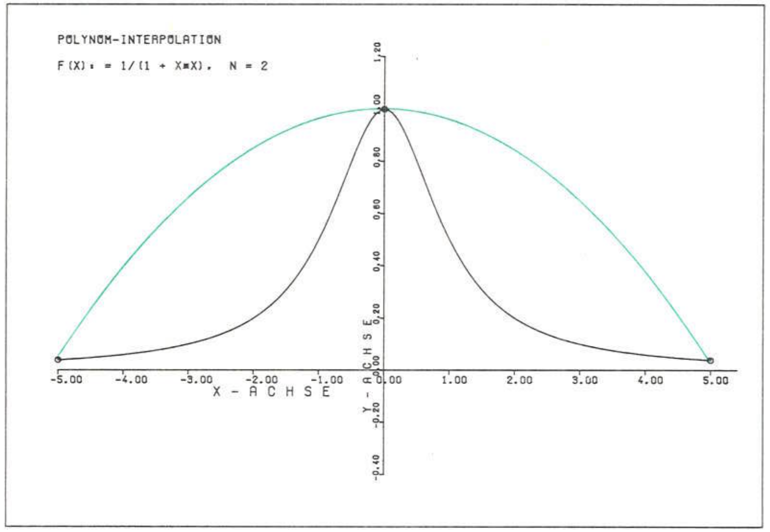

Abbildung Nr. 7

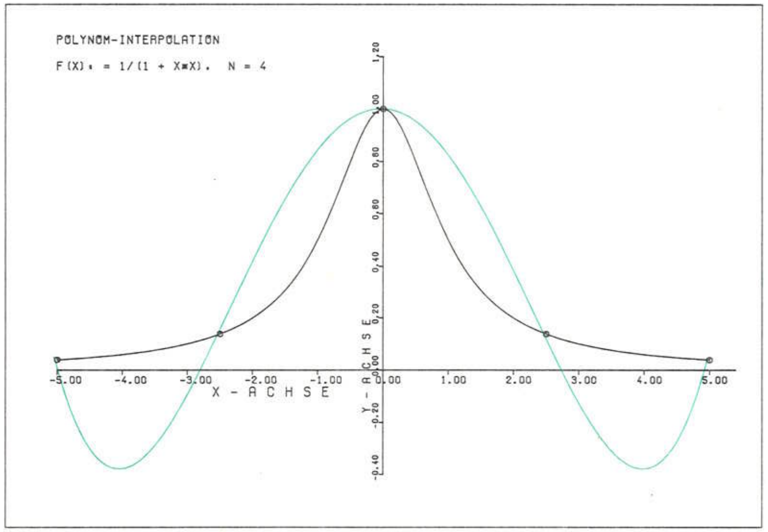

Abbildung Nr. 8

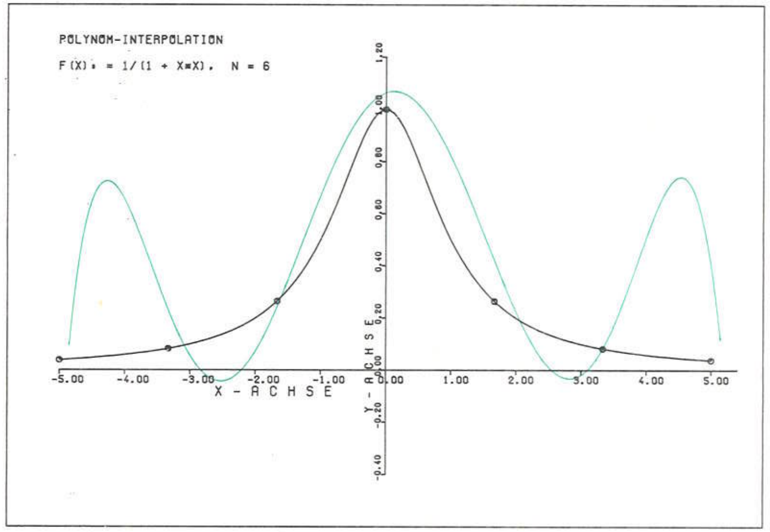

Abbildung Nr. 9

Nun liegt die - vom Gefühl bestätigte - Vermutung nahe: Wenn man mehr Information hineinsteckt, also mehr Stützpunkte berücksichtigt, sollte die Approximation besser werden. Sehen wir uns das - etwas gestaucht gezeichnet - an:

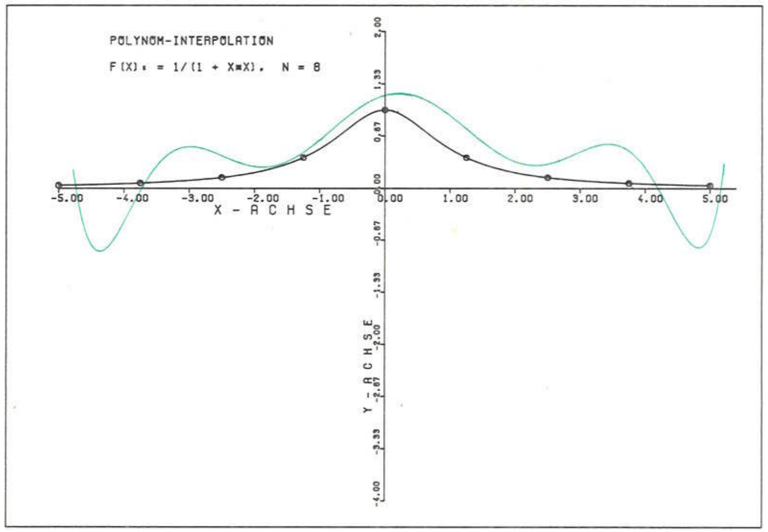

Abbildung Nr. 10

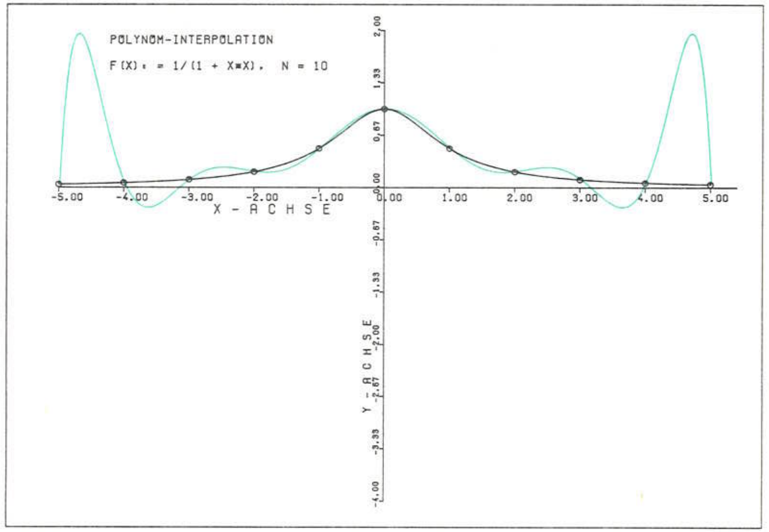

Abbildung Nr. 11

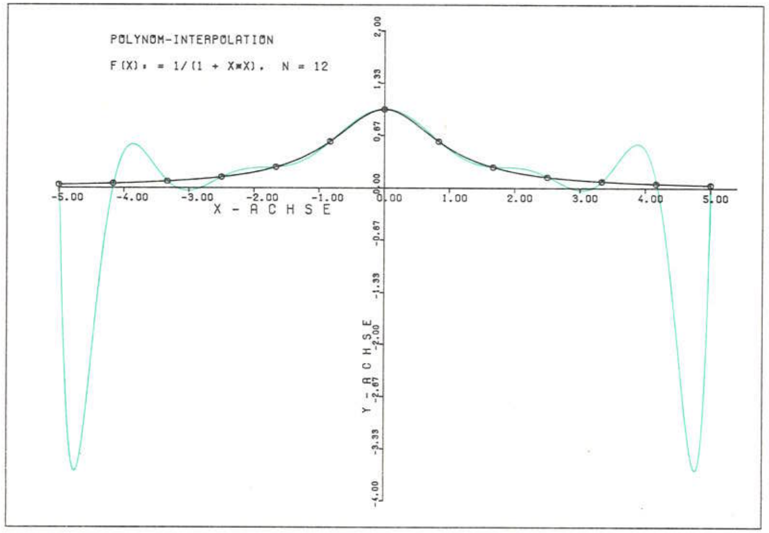

Abbildung Nr. 12

Im mittleren Bereich ist die Approximation gut, am Rande katastrophal.

Die Theorie zeigt dann (RUNGE (1901)), daß die Approximation nicht nur nicht besser wird, sondern daß

$$\max_{[-5,5]} |P_n(x) - f(x)| \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty) \text{ gilt, wenn}$$

P_n das Interpolationspolynom zu n (äquidistanten) Stützstellen bezeichnet.

Das aufgezeigte Verhalten ist gar nicht mal - wie man vielleicht zunächst meinen könnte - sonderlich pathologisch, sondern vielmehr charakteristisch für Interpolation durch hochgradige Polynome:

Erhebliche Abweichungen zwischen den Stützstellen; außerordentlich starkes Oszillieren ("Flattern"), besonders am Rande.

Es ist wichtig, das Ergebnis von RUNGE richtig zu verstehen. Es besagt *nicht*, daß man eine stetige Funktion nicht immer durch ein Polynom (gleichmäßig) approximieren kann. (Tatsächlich besagt ein klassischer Satz von WEIERSTRAß, daß das möglich ist.) Das Ergebnis von RUNGE besagt nur, daß man solche Polynome *hier* nicht durch Interpolation mit äquidistanten Stützstellen erhalten kann.

Es liegt der Einwand nahe, daß die mißlichen Eigenschaften durch die Äquidistanz der Stützstellen hervorgerufen werden. Das ist bei *diesem* Beispiel richtig: Durch geschicktere Stützstellenwahl (Verdichten am Rande) kann hier Konvergenz der Folge der Interpolationspolynome erreicht werden, und es lassen sich auch - ganz allgemein - Aussagen über optimale Stützstellenverteilung machen.

Dies löst jedoch keineswegs das Dilemma:

1. Ein Satz von FABER (1914) besagt: Zu jeder - noch so geschickten - Wahl einer Stützstellenfolge existiert eine stetige Funktion gegen die die zugehörigen Interpolationspolynome nicht (gleichmäßig) konvergieren.

2. Vom Standpunkt des Praktikers aus sind auch Aussagen über optimale Stützstellenverteilung nicht besonders hilfreich; denn oft sind die Stützstellen (zum Beispiel Ortskoordinaten oder Zeitpunkte) nicht ohne weiteres frei wählbar: So muß beispielsweise in der Geophysik[3] oft unter Bedingungen registriert werde, die nicht optimal der Meßgröße angepaßt sind. Bei Feldmessungen ist die Stationsauswahl nicht nur abhängig von dem zu erwartenden Signal, sondern auch von der Zeitdauer des Einsatzes (was eine Kostenfrage ist) und dem Meßaufwand (Zugänglichkeit des Ortes (mitten auf einer belebten Straßenkreuzung; irgendwo, wo man nasse Füße bekommt)). Bei Dauerregistrierungen, zum Beispiel von geodynamischen Effekten über mehrere Jahre hinweg,kommen noch Störungen durch äußere Einflüsse wie Stromausfall oder Gerätedefekte usw. hinzu.

Ein befriedigendes Verfahren sollte also Kurven, bzw. Funktionen liefern, die erstens durch Meßungenauigkeiten oder Stützstellenabänderung nicht zu sehr in ihrem Charakter und in ihren Werten verändert werden, und zweitens soll das Weglassen einzelner Stützpunkte keine allzu großen Änderungen hervorrufen. (Beides sind Fragen der S t a b i l i t ä t .)

3 GERHARD JENTZSCH, GERALD LANGE und OTTO ROSENBACH, "Anwendung der Spline-Funktionen zur Bearbeitung geophysikalischer Meßreihen", in: Spline Functions, Proceedings of an International Symposium Held at Karlsruhe, Germany, May 20 - 23, 1975, Lecture Notes in Mathematics 501, 99 - 115.

Wie es in dieser Hinsicht um die Polynom-Interpolation bestellt ist, zeigen die nächsten beiden Abbildungen:

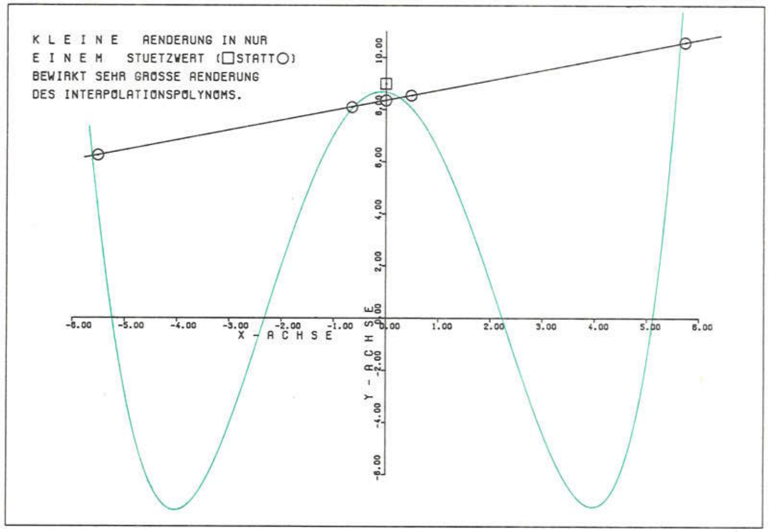

Abbildung Nr. 13

K l e i n e Änderungen in e i n e m Stützwert können sehr große Änderungen des Polynoms bewirken, insbesondere auch in dem von der Änderung eigentlich nicht betroffenen Intervall (sowohl quantitativ, das heißt in der Größe der Abweichung, aber auch qualitativ: das geometrische Erscheinungsbild ist völlig verändert.) Eingangsfehler werden katastrophal verstärkt.

Zu welcher Katastrophe das Weglassen von Stützstellen führen kann, zeigt das nächste Bild:

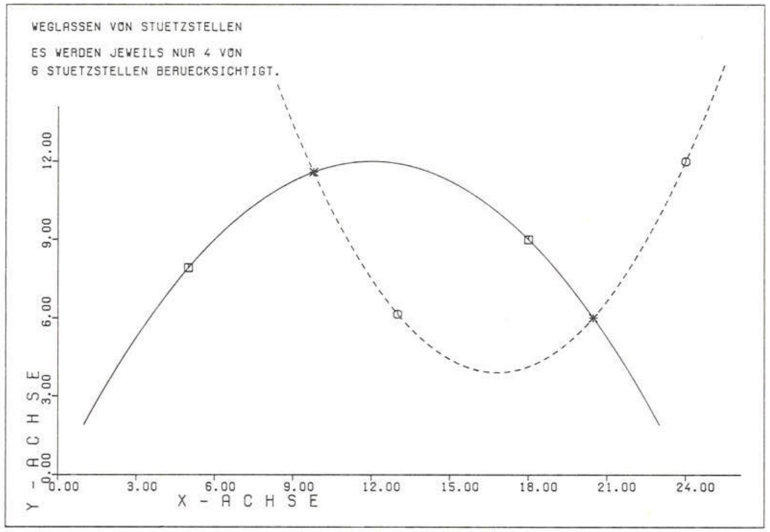

Abbildung Nr. 14

Beide Bilder zeigen ein sehr empfindliches Reagieren auf Datenänderung. (Ein Defekt, der vom Standpunkt des Praktikers gesehen, schwerwiegend ist.)

Lassen Sie mich dieses Kapitel mit einem überzeugenden Beispiel aus meinem privaten Bereich abschließen:
Mein Patenkind YVONNE kam viel zu früh auf die Welt und wog bei Geburt nur 1680 g. Die besorgten Eltern verfolgten aufmerksam die Gewichtsentwicklung ihrer Tochter und notierten die eingezeichneten Werte. Das zugehörige Interpolationspolynom zeigt ausschnittsweise die folgende Abbildung:

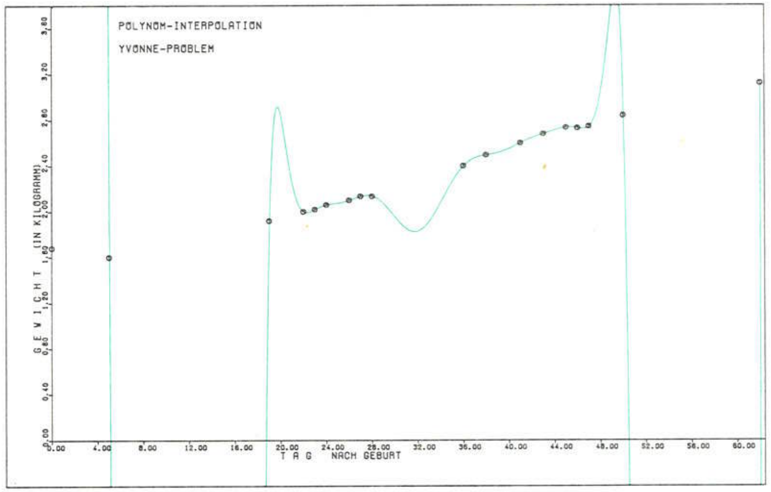

Abbildung Nr. 15

Ungefähr 30 Stunden nach der Geburt schon wäre - dem Interpolationspolynom nach - YVONNE 219377 kg schwer gewesen und zum Abschluß der ersten Woche - 29464 kg (also besonders tot) gewesen; im Gegensatz dazu erfreut sie sich heute bester Gesundheit.

Ich hoffe, daß ich Sie überzeugen konnte: Interpolations-Polynome sind völlig ungeeignet zu dem, was man meist mit dem englischen Begriff "c u r v e f i t t i n g" (Kurven anpassen) bezeichnet. Wegen der "Welligkeit" der Polynomkurven ist das geometrische Erscheinungsbild oft völlig anders, als dies die empirischen Daten erwarten lassen.

Wir kommen also nicht umhin, die für viele andere Fragestellungen so bequemen Polynome durch andere Approximationsfunktionen zu ersetzen. Beim Polygonzug (das war zum Beispiel die Fieberkurve) war die Schwankung der interpolierenden Funktion zwar minimal, aber die graphische Darstellung war zu eckig. Zweckmäßig und naheliegend ist daher ein Kompromiß zwischen Polygonzug und Interpolationspolynomen: Man verknüpft niedriggradige - und daher schwach schwankende - Polynome zu einer im ganzen Intervall möglichst oft differenzierbaren Funktion, das heißt zu einer glatten Kurve: Das führt zu den Spline-Funktionen, zur

SPLINE-INTERPOLATION

Obwohl Spline-Funktionen, ohne als solche bezeichnet zu werden, früher schon in einigen wenigen isolierten Situationen (zum Beispiel von Astronomen und Versicherungsmathematikern) benutzt wurden, wird meist eine zunächst wenig beachtete Arbeit von SCHOENBERG (1946)[4], in der sie benannt und erstmals ausgiebig untersucht wurden, als Anfang der Entwicklung genannt. Aber erst seit den 60er Jahren haben sich die Theorie und die Erfahrungen mit den Anwendungen dieser Funktionen beachtenswert entwickelt.

SCHOENBERG selbst sagt zu diesen Funktionen:
Die fundamentalen Eigenschaften sind so einfach und die eingehende Mathematik so elementar, daß es erstaunlich ist, daß sie nicht vorher entdeckt und untersucht wurden.

Diesen Satz kann ich nicht voll unterstreichen; denn mit den heutigen Rechenanlagen ist die Berechnung einer Spline-Funktion - auch zu mehr als 100 Knoten - eine Sache von Sekunden; versucht man in einem solchen Fall, die Spline-Funktion von Hand zu berechnen, dann kann man darüber alt werden und manche schönen Dinge im Leben verpassen.

Das Verfahren wurde also - für hohe Knotenzahlen - erst

4 I.J. SCHOENBERG, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions", Part A and Part B, Quaterly of Applied Mathematics, 4, 1946, 45 - 99 and 112 - 141.

durch die revolutionäre Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen praktikabel und damit interessant.

Gegeben $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ und reelle Zahlen $y_0, y_1, \cdots, y_n$.

Eine auf $[a,b]$ definierte Funktion S heißt (kubische) **Spline-Funktion**, wenn

a) S zweimal stetig differenzierbar ist und
b) S für jedes $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit einem Polynom höchstens dritten Grades übereinstimmt.

Eine solche Funktion besteht also stückweise aus Polynomen (höchstens dritten Grades), die an den Nahtstellen - x_i - hinreichend glatt verheftet sind.

Für diejenigen, die mit der Bedingung a) nichts anfangen können, sei folgendes Beispiel genannt:
Bezeichnet S die zurückgelegte Strecke eines Zuges in Abhängigkeit von der Zeit, dann bedeuten so ungefähr "S stetig", daß der Zug keine Sprünge macht, "S einmal stetig differenzierbar", daß auch keine abrupten Geschwindigkeitsänderungen vorkommen und "S zweimal stetig differenzierbar", daß auch keine ruckartigen Beschleunigungsänderungen auftreten. (Wenn Sie sich also das Orts-Zeit-Diagramm eines besonders sanft beschleunigenden und bremsenden TEE vorstellen, haben Sie ein ungefähres Bild einer solchen Funktion.)

Die Bedingung a) ist gerade die stärkste Forderung für einen glatten Übergang, die noch **nicht** nach sich zieht, daß es sich um ein einfaches Polynom handelt.

Eine Spline-Funktion heißt "natürlich", wenn $S''(a) = S''(b) = 0$ gilt. Man zeigt nun wiederum:

Es gibt genau eine (natürliche, kubische)[5] Spline-Funktion mit $S(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots, n)$.

Ich möchte Sie nicht mit einem Beweis quälen, doch für die mathematisch Versierten kurz die Idee andeuten, die zugleich etwas über das Berechnungsverfahren aussagt:
Man macht den Ansatz
$S(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \delta_j(x - x_j)^2 + \gamma_j(x - x_j)^3$ für $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, und $M_j :== S''(x_j)$. Es ist dann $y_j = \alpha_j$, und die β_j, δ_j, γ_j lassen sich in einfacher Weise durch x_j, y_j und M_j darstellen. Das Problem, die M_j zu bestimmen, führt auf eine symmetrische, tridiagonale, diagonaldominante Matrix, die man (numerisch stabil) durch einfache (das heißt ohne spezielle Pivot-Strategie) GAUß-Elimination löst.

Spline-Funktionen sind damit auf dem Rechner (mit einem modifizierten HORNER-Schema) fast so einfach zu berechnen wie Interpolations-Polynome.

Spline-Funktionen approximieren die zu interpolierende Funktion f derart gut, daß sie für wachsende Knotenzahlen bereits unter schwachen Voraussetzungen gleichmäßig gegen f konvergieren, wobei sich die Konvergenz sogar noch auf die Ableitungen überträgt, weshalb sie auch im besonderen Maße zum Beispiel für die numerische Behandlung von Differentialgleichungen geeignet sind.

Kommen wir zu unserer Testfunktion $f(x) = 1/(1 + x^2)$ zurück und erinnern wir uns noch einmal an das Ergebnis der Polynom-Interpolation für $n = 10$ (Abbildung Nr. 11);

5 Den Zusatz "natürlich" und "kubisch" lassen wir im folgenden immer weg.

im Gegensatz dazu sieht die interpolierende Spline-Funktion so aus:

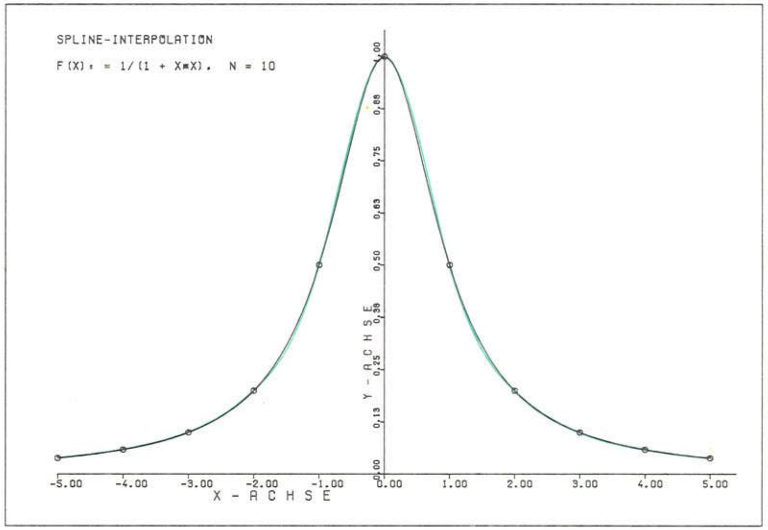

Abbildung Nr. 16

Sie ist kaum von der Originalkurve zu unterscheiden.

Während das Verhalten der Interpolationspolynome bei Störungen insbesondere durch das starke Ausstrahlen in eigentlich nicht betroffene Bereiche äußerst unbefriedigend war - wir sehen uns das noch einmal an einem etwas gröberen Beispiel an - klingt bei der interpolierenden Spline-Funktion die durch die Störung verursachte Unruhe nach außen rasch ab.

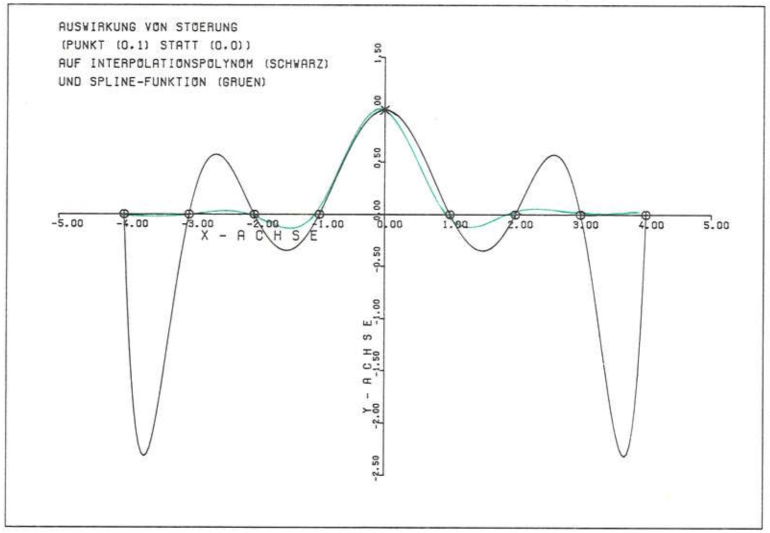

Abbildung Nr. 17

Das bedeutet also, daß zur Untersuchung eines bestimmten Bereiches im wesentlichen auch nur Daten aus dieser Region benutzt werden, während bei den Interpolationspolynomen das lokale Verhalten das globale bestimmt.

Wie geeignet Splines sind, um Kurven durch Meßpunkte zu zeichnen, sehen wir auch an unserem YVONNE-Beispiel. Abbildung Nr. 15 demonstrierte das völlig indiskutable Verhalten des zugehörigen Interpolationspolynoms; dagegen sieht die interpolierende Spline-Funktion schon ganz akzeptabel aus:

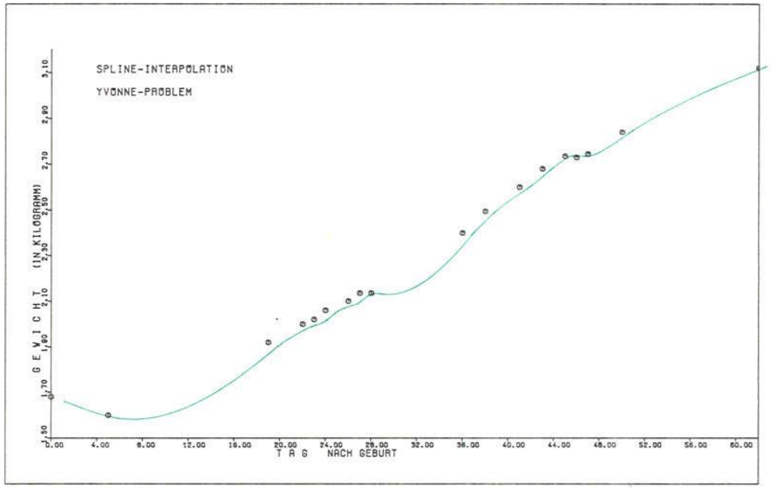

Abbildung Nr. 18

Daß nicht nur zufällig bei den gewählten Beispielen der Kurvenverlauf vernünftig und nach dem subjektiv-ästhetischen Empfinden des Betrachters zufriedenstellend ist, sondern starke Oszillationen bei Spline-Funktionen nicht möglich sind, beruht nicht nur auf der Erfahrung, sondern zeigt der folgende Satz von HOLLADAY (1956)

> Ist f eine von S verschiedene, auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots, n)$, dann gilt
> $$\int_a^b f''(x)^2 dx > \int_a^b S''(x)^2 dx$$

Die Größe $\int_a^b f''(x)^2 dx$ beschreibt näherungsweise die Gesamtkrümmung der Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$; Splines sind also als Interpolationsfunktionen in diesem Sinne o p t i m a l. Daher eignen sie sich vorzüglich zum Kurvenzeichnen, zum Beispiel im Schiffs-, Flugzeug- und allgemein im Karosseriebau, beim Einsatz numerisch gesteuerter Werkzeug- oder Zeichen-Maschinen zur Lösung von Konstruktions- und Design-Problemen.

Zur graphischen Interpolation einer Reihe von Datenpunkten benutzt man als manuelles Glättungsverfahren häufig eine biegsame dünne Latte - deutsch: S t r a k l a t t e , englisch: S p l i n e - , die man durch normalkraftfreies Einklemmen zwischen verschiebbaren Gewichten ("dogs" oder "rats") zwingt, die Punkte auf dem Zeichenpapier zu verbinden. Im Schiffsbau ist dies ein uraltes Werkzeug zur Bestimmung des Verlaufs der Stringer (das sind die in Längsrichtung des Schiffes, quer zu den Spanten befestigten Planken, die die Außenwand des Schiffsrumpfes bilden.) Physikalisch ist die Lage der Latte dann durch ein Minimum an elastischer Energie (und damit der Gesamtkrümmung) charakterisiert. Das geradlinige Hinausragen der Straklatte über die Endpunkte bedeutet $S''(a) = S''(b) = 0$, was die Bezeichnung "natürlich" für diese Randbedingung erklärt.

A U S G L E I C H - S P L I N E S

Manchmal ist es nicht sinnvoll, vorgegebene Punkte durch glatte Kurven zu verbinden, sondern Kurven zu den Punkten möglichst gut anzupassen, also einem Glättungsprozeß zu unterwerfen. Hat man Anhaltspunkte für ein mögliches Modell der anzupassenden Kurve (zum Beispiel $a \cos(bx + c)$ oder $a + b \exp(-cx)$), so bestimmt man die Kurvenparameter (hier a, b, c) häufig im Sinne der kleinsten Quadrate. Existiert jedoch keine solche Modellvorstellung, so erweisen sich " g l ä t t e n d e " oder " a u s g l e i c h e n d e " Spline-Funktionen als zweckmäßig:

Dieses Verfahren berücksichtigt die Tatsache, daß die vorgegebenen Punkte - etwa durch empirische Messungen - mit Fehlern behaftet sein können. Im YVONNE-Beispiel

(siehe Abbildungen 15 und 18) also, daß die Gewichtswerte nicht bis auf Milligramm exakt bestimmt wurden, sondern vielleicht bis zu einer Toleranz von 10 g stimmen.

Man bestimmt daher n i c h t f (zweimal stetig differenzierbar) mit $\int_a^b f''(x)^2 dx$ minimal unter der Bedingung, daß $f(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots, n)$ gilt, s o n d e r n

f (zweimal stetig differenzierbar) mit $\int_a^b f''(x)^2 dx$ minimal unter der Bedingung, daß die Abweichungen nicht zu groß werden; zum Beispiel:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{f(x_i) - y_i}{\delta y_i} \right)^2 \leq s \quad \text{für ein} \quad s > 0 \ .$$

Auch hier zeigt man - allerdings nicht mehr ganz so einfach - die Existenz einer solchen ("S p l i n e - A u s g l e i c h" -) Funktion [6] .

Die Stärke des Ausgleichs kann durch die Parameter s und δy_i gesteuert werden; hier liegt die Möglichkeit, der subjektiven Beurteilung des Konstrukteurs oder Stilisten Rechnung zu tragen und damit sich der Aufgabenstellung anzupassen. Kleine s führen dann zu Ergebnissen, die nahe an der Spline-Interpolation liegen, größere s liefern weniger gute Approximationen an den Stützstellen, dafür aber einen glatteren Verlauf. Die δy_i erlauben noch, etwaige Unterschiede in der Genauigkeit der einzelnen Meßpunkte zu berücksichtigen; sie sollten die Größenordnung der Standardabweichung haben, wenn s ungefähr bei $n + 1$ gewählt wird.

[6] I.J. SCHOENBERG, "Spline functions and the problem of graduation", Proc. Nat. Acad. Scienc. USA, 52, 1964, 947 - 950.

Die Abbildungen 13 und 17 zeigten, wie Interpolationspolynome auf Störungen reagieren. Interpolierende Spline-Funktionen (Abbildung 17) waren da schon wesentlich besser. Spline-Ausgleich (mit n=8, s=9 und $\delta y_i = 0.1$) liefert dieses Ergebnis:

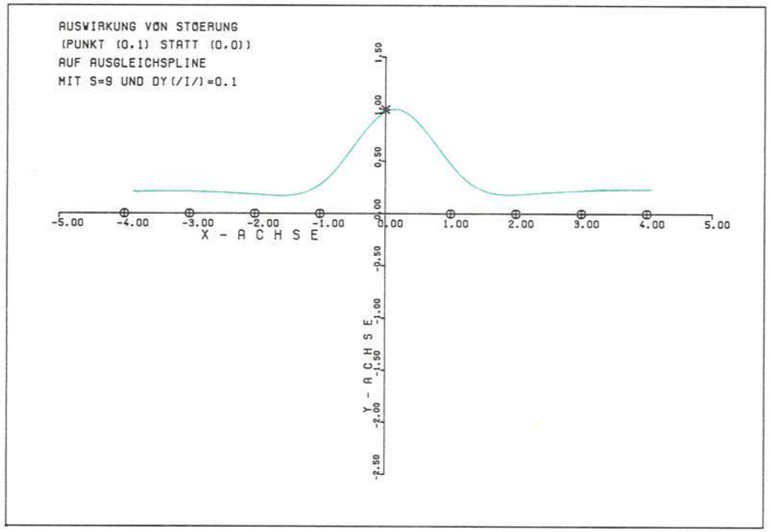

Abbildung Nr. 19

Die Auswirkung der Störung klingt noch schneller ab.

Bei dem vorletzten Beispiel habe ich irgendeine Kurve (schwarz) hingezeichnet, meine beiden Töchterlein Punkte um die Kurve markieren lassen, sie also als Quasi-"Pseudo-Zufallszahlengeneratoren" benutzt. Die ausgleichende Spline-Funktion (grün) zu diesen Punkten (mit n=25, s=26 und δy_i=0.5) sieht dann so aus,

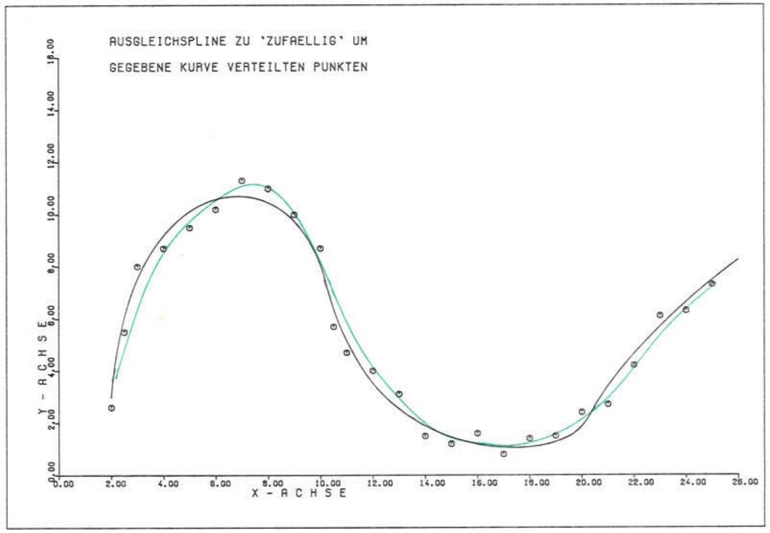

Abbildung Nr. 20

rekonstruiert die ursprüngliche Funktion also ziemlich gut.

Bei dem YVONNE-Beispiel war die interpolierende Spline-Funktion in Abbildung 18 gezeigt, die ausgleichende Spline-Funktion (mit n=17, s=18 und δy_i=10) hat dieses Aussehen

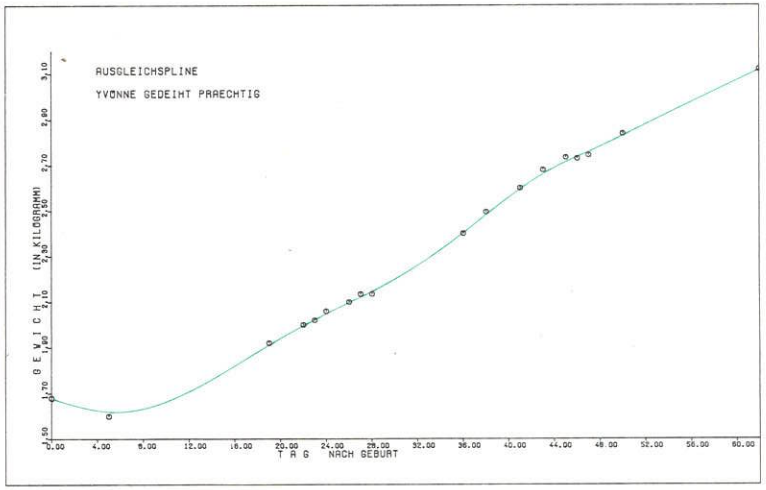

Abbildung Nr. 21

Ich hoffe, daß ich Sie von zwei Dingen überzeugen konnte:
Erstens, allgemein: Daß Mathematik auch als ein Mittel zur Lösung konkreter Aufgaben unter realistischen Randbedingungen betrieben werden kann.
Zweitens, speziell: Von der Brauchbarkeit und Güte der interpolierenden und ausgleichenden Spline-Funktionen; daß sie sich vorzüglich zur 'Interpolation' bei praktischen Problemen eignen.

Die Abbildungen wurden auf dem TR 440 der Universität Konstanz berechnet und von dem angeschlossenen Tischplotter (BENSON, Modell 220) gezeichnet.

Zur Berechnung der interpolierenden und ausgleichenden Spline-Funktionen wurden die ALGOL-Programme von C.H. REINSCH (in: "Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs", Herausgegeben von R. SAUER und I. SZABO, Teil III, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1968, 266 ff und 275 ff) benutzt.

Dr. rer. nat. Dieter Hoffmann, Privatdozent im Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz, wurde am 08.08.1943 in Bitburg (Rheinland-Pfalz) geboren.

Nach dem Abitur im Frühjahr 1963 und nach Ableistung des Grundwehrdienstes studierte er von Wintersemester 1964/65 bis zum Diplom im Februar 1970 Mathematik (naturwissenschaftlich-technische Richtung) an der Universität zu Köln. Als Schüler von Professor Dr. F.W. Schäfke promovierte er im Juni 1974 mit der Dissertation "Differenzengleichungen in quasinormierten Gruppen" an der Universität Konstanz, habilitierte sich im Juni 1977 im Bereich des Gemeinsamen Ausschusses der Naturwissenschaftlichen Fachbereiche der Universität Konstanz mit Arbeiten aus dem Gebiet der Integrationstheorie und erhielt die Lehrbefugnis für das Fach Mathematik.

Nach dem Diplom war er als Wissenschaftlicher Assistent bis März 1971 am Mathematischen Institut der Universität zu Köln, anschließend bis August 1972 am 2. Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin und von da ab am Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz tätig.

Der hier vorliegende Text gibt die Öffentliche Antrittsvorlesung wieder, die der Autor am 13.02.1978 an der Universität Konstanz gehalten hat.

KONSTANZER UNIVERSITÄTSREDEN
HERAUSGEGEBEN VON GERHARD HESS

1. Gerhard Hess: Probleme der deutschen Hochschule und die Neugründungen
2. Waldemar Besson: Die großen Mächte
3. Hans Robert Jauß: Literaturgeschichte als Provokation der Literaturwissenschaft
4. Hans Aebli: Natur und Kultur in der Entwicklung des Menschen
5. Friedrich Kambartel: Was ist und soll Philosophie?
6. Ralf Dahrendorf: Die Soziologie und der Soziologe — Zur Frage von Theorie und Praxis
7. Franz Georg Maier: Archäologie und Geschichte · Ausgrabungen in Alt-Paphos (Cypern)
8. Horst Sund: Evolution und Struktur der Proteine
9. Manfred Fuhrmann: Die Antike und ihre Vermittler · Bemerkungen zur gegenwärtigen Situation der klassischen Philologie
10. Peter Hemmerich: Anorganische Aspekte des Lebens
11. Wolfgang Pfleiderer: Organische Chemie — gestern, heute, morgen
12. Dirk Pette: Zellphysiologie des Stoffwechsels
13. Wolfgang Preisendanz: Über den Witz
14. Herbert Nesselhauf: Der Ursprung des Problems »Staat und Kirche«
15. Jurij Striedter: Dichtung und Geschichte bei Puškin
16. Gerhard Hess: Die Universität Konstanz — Reform als ständige Aufgabe
17. Arno Borst: Geschichte an mittelalterlichen Universitäten
18. Rolf-Richard Grauhan: Modelle politischer Verwaltungsführung
19. Frederic Vester: Planung, Forschung, Kommunikation im Team
20. John Francis Embling: Die neuen britischen Universitäten als Instrumente der Reform
21. Horst Rabe: Autorität – Elemente einer Begriffsgeschichte
22. Wolfgang Brezinka: Über Absicht und Erfolg der Erziehung · Probleme einer Theorie der erzieherischen Wirkung

23. Karl-Heinz Flechsig: Die technologische Wendung in der Didaktik
24. Detlef Kantowsky: Indien – am Vorabend der Revolution?
25. Fritz Scharpf: Demokratietheorie zwischen Utopie und Anpassung
26. Eberhardt Weiler: Immunitätsforschung und das Dogma der molekularen Biologie
27. Gerhard Neubauer: Kalkül und Figur – Von Descartes zu Hilbert
28. Wolfgang Iser: Die Appellstruktur der Texte · Unbestimmtheit als Wirkungsbedingung literarischer Prosa
29. Ulrich Gaier: Form und Information – Funktionen sprachlicher Klangmittel
30. Hubert Schleichert: Logik und Denken
31. Josef Schrenk: Zum Größeninventar einer Theorie des Satzes
32. Jürgen Audretsch: Schwarze Löcher – Das Schicksal schwerer Sterne
33. Peter Hartmann: Aufgaben und Perspektiven der Linguistik
34. Friedrich Sixtl: Die Gültigkeit von Prädiktoren bei nicht identifizierbaren Merkmalsträgern
35. Gerold Adam: Die Steuerung des Ionentransportes durch die Zellmembran
36. Hans Batzer: Über die Bedeutung synthetischer Makromoleküle
37. Wolrad Vogell: Struktur und Funktion der Zelle
38. Rudolf Klein: Quantenflüssigkeiten
39. Rudolf Cohen: Zum Begriff der Angst in der Differentiellen Psychologie
40. Kurt Badt: Das Spätwerk Cézannes
41. Friedrich Kübler: Juristenausbildung im Zielkonflikt
42. Ernst Florey: Aufgaben und Zukunft der Biologie
43. Peter Läuger: Die Photosynthese der grünen Pflanzen
44. Werner Bos: Zur Axiomatik des Arithmetischen Mittels
45. Heinz Dehnen: Über den Endzustand der Materie
46. Alexander Demandt: Geschichte als Argument · Drei Formen politischen Zukunftsdenkens im Altertum
47. David Daube: Gewaltloser Frauenwiderstand im Altertum
48. Reinhard Bendix: Der Glaube an die Wissenschaft
49. Hubert Markl: Aggression und Altruismus
50. Jürgen Mittelstraß: Das praktische Fundament der Wissenschaft und die Aufgabe der Philosophie

51. Bernhard Kadenbach: Die Biogenese der Mitochondrien
52. Dietrich Korn: Grenzen des Wissens, anhand von Beispielen aus der Physik
53. Gerhard Thielcke: Die Wirkung erlernter Signale auf die Artbildung
54. Fritz M. Pohl: Einfache Muster aus großen Informationsmengen
55. Peter L. Schmidt: Politik und Dichtung in der Panegyrik Claudians
56. Johannes C. Jochims: Die magnetische Kernresonanz als Werkzeug des Stereochemikers
57. Fritz Stern: Um eine neue deutsche Vergangenheit
58. Hans Werner Hofer: Mechanismen der Stoffwechselregulation
59. Hans Robert Jauß: Kleine Apologie der ästhetischen Erfahrung Mit kunstgeschichtlichen Bemerkungen von Max Imdahl
60. Gerhard Hess: Zukunft der Universität – Zukunft der Jugend
61. Erhard R. Wiehn: Ungleichheit unter Menschen als soziologisches Problem
62. Hein Kötz: Über den Stil höchstrichterlicher Entscheidungen
63. Friedrich Kübler: Kommunikation und Verantwortung
64. Bernd Rüthers: Tarifautonomie und gerichtliche Zwangsschlichtung
65. Peter Janich: Zweck und Methode der Physik aus philosophischer Sicht
66. Theodor Eschenburg: Was ist die »neue Mitte«?
67. Paul Kellermann: Kritik des Bildungsgesamtplans · Über Struktur und Tendenzen der Expansion organisierter Bildung
68. Helmut Sauer: Entwicklungsbiologie · Experimente an Eiern und Pilzen
69. Peter Berthold: Endogene Jahresperiodik · Innere Jahreskalender als Grundlage der jahreszeitlichen Orientierung bei Tieren und Pflanzen
70. Armin-Dietmar Karpf: Struktur der Elementarteilchenmaterie
71. Josef Jäckle: Schallwellen in festen Körpern
72. Rudolf Fritsch: Zum Feuerbachschen Kreis
73. Götz Wienold: Über das Arbeiten an einer Theorie des Zweitsprachenerwerbs
74. Alfred Grosser: Was ist deutsche Außenpolitik?
75. Walther Rehwald: Physikalische Ähnlichkeitsgesetze
76. Peter Böger: Photosynthese und pflanzliche Produktivität

77. Hans Robert Jauß: Kurt Badts Apologie der Kunst; Max Imdahl: Wandel durch Nachahmung: Rembrandts Zeichnung nach Lastmans »Susanna im Bade« · Vorträge Kurt Badt zu Ehren
78. Wolfram Kutsch: Neuroethologie – Auf der Suche nach den Grundlagen des Verhaltens
79. Klaus Heiner Kamps: Vollkommene Zahlen
80. Werner Rathmayer: Wirklichkeit und Interpretation von Bildern: Die Rolle von Auge und Gehirn beim Sehen
81. Ralf Dahrendorf: Die Staatsräson der Bundesrepublik Deutschland
82. Rolf Knippers: Biologisches zur Krebsentstehung
83. Ferdinand Hucho: Gedächtnismoleküle
84. Ewald Daltrozzo: Farbstoffe
85. Jürgen Brickmann: Chemie als nichtempirische Wissenschaft
86. Winfried Boos: Intelligente Bakterien; Chemotaxis als primitives Modell von Reizleitungssystemen
87. Dieter Lorenz: Wissenschaftsfreiheit zwischen Kirche und Staat
88. Ekkehard Recknagel: Atomkerne als Beobachter im Mikrokosmos
89. Jean Starobinski: Rousseaus Anklage der Gesellschaft
90. Iring Fetscher: Überlebensbedingungen der Menschheit – Zur Dialektik des Fortschritts
91. Christoph Schwarze: Sprachschwierigkeiten, Sprachpflege, Sprachbewußtsein: Das Phänomen der »chroniques de langage«
92. Thomas Ellwein: Über politische Verantwortung
93. Albrecht Wellmer: Praktische Philosophie und Theorie der Gesellschaft. Zum Problem der normativen Grundlagen einer kritischen Sozialwissenschaft
94. Werner Lehfeldt: Perspektiven der vergleichenden Grammatik der slavischen Sprachen
95. Bernd Effe: Die Genese einer literarischen Gattung: Die Bukolik
96. Gerhard Graf: Der Zusammenhang zwischen Weltkonjunktur und nationaler Konjunktur – Das Beispiel Bundesrepublik Deutschland
97. Hans J. Schneider: Über das Schweigen der Philosophie zu den Lebensproblemen
98. Eckart Frehland: Über den Fortschritt in der Physik
99. Lothar Burchardt: Hitler und die historische Größe

100. Erwin Häckel: Demokratische Außenpolitik?
101. Wolfgang Schuller: Die Stadt als Tyrann – Athens Herrschaft über seine Bundesgenossen
102. Rudolf Mengel: Insektizide heute – Chemie, Wirkung, Gefahren
103. Jürgen Schlaeger: Grenzen der Moderne: Gertrude Steins Prosa
104. Armin Hildenbrandt: Das Ei als Reagenzglas
105. Dietrich Fürst: Verhaltenslenkende Instrumente in der Strukturpolitik
106. Gerd Ronning: Der Einfluß von Erwartungen auf wirtschaftliches Verhalten
107. Hans Rudolf Picard: Wie absurd ist das absurde Theater?
108. Carsten Thomas Ebenroth: Konzernkollisionsrecht im Wandel außenwirtschaftlicher Ziele
109. Gerhard Pohl: Die Erweiterung unserer Sinne
110. Dieter Hoffmann: Spline-Interpolation · Die Kunst, in Wertetabellen zwischen den Zeilen zu lesen
111. Günther Boheim: Dissipative Strukturen
112. Hans-Wolfgang Strätz: Der Verlobungskuß und seine Folgen rechtsgeschichtlich besehen
113. Volkbert Roth: Wert der Ware Arbeitskraft
114. Hubert Kolb: Autoimmunität: Das Immunsystem zerstört den eigenen Körper
115. Wolfram Wettling: Nichtlineare Optik
116. Roland Benz: Künstliche Lipidmembranen – Modellsystem für biologische Membranen?
117. Gottfried Huttner: Planung und Zufall in der Chemie
118. Ihab Rasched: Biochemie der Atherosklerose
119. Wilhelm Kempf: Zur Neuorientierung der Aggressionsforschung
120. Bernd Wunder: Die Rekrutierung der Beamtenschaft in Deutschland
121. Horst Sund: Gegenwärtige und zukünftige Aufgaben und Probleme der Biotechnologie
122. Kurt Partl: Goethes Weg vom »Werther« zum »Tasso«
123. Bernhard Badura: Grundlagen einer konsumentenzentrierten Gesundheitspolitik
124. Ernst Köhler: Historische Überlegungen zur Legitimationsbasis der bürgerlichen Demokratie in Deutschland

125. Klaus P. Schäfer: Was ist ein Gen?
126. Jochen-Ulrich Peters: Poesie und Revolution; Majakovskijs Lyrik und Versepik als Paradigma der russisch-sowjetischen Avantgarde

Die Reihe Konstanzer Universitätsreden wird fortgesetzt