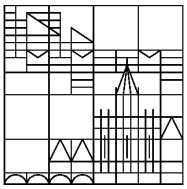
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
DK Huynh



Repetitorium Analysis Blatt 6

Aufgabe 23

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a-b}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und zeigen Sie:
Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \sqrt[k]{x}$$

ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 24
Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie: Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie: Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig.

Aufgabe 25
Es sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{-x} & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit. Beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen.

Aufgabe 26
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2n + 1$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ (x-1)^3, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

(c) $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{1-x}{x}.$$