Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
DK Huynh

Repetitorium Analysis Blatt 8

Aufgabe 31
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Ferner sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die n-te Ableitung von f die folgende Form hat

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Aufgabe 32
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Bestimmen Sie im positiven Fall den Grenzwert.

Aufgabe 33
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k - 2}{4^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ mit $s \in \mathbb{Q}$ und $s < 1$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$.

Aufgabe 34
Sei $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig, gleichmäßig stetig, Lipschitz-stetig? Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 35
Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x + 5$$

injektiv ist. Welchen Wert hat die Ableitung $g'(y)$ der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y = 5$?

Aufgabe 36
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x-1|^3.$$

Finden Sie eine Stammfunktion zu f.