Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
DK Huynh

Repetitorium Lineare Algebra Blatt 2

Aufgabe 6
Es seien H_1, H_2 Untergruppen der Gruppe G. Zeigen Sie, dass $H_1 \cap H_2$ auch eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 7
Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}^3$ sind Untervektorräume:

(i) $M_1 = \{(x, y, z) | xy - z = 0\}$

(ii) $M_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

(iii) $M_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^4 = 0\}$

(iv) $M_4 = \{(x, y, z) | x + 2y = 3z\}$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die Menge V aller konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned}(x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

einen reellen Vektorraum bildet. Was ist seine Dimension? Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$, die der Folge (x_n) ihren Grenzwert zuordnet, linear ist. Was ist $\ker \varphi$?

Aufgabe 9
Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie

(i) $\mathrm{Im}\varphi$ ist ein Untervektorraum von W.

(ii) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Aufgabe 10
Es seien $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 0)$.

(i) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(ii) Sei $w = (5, 1, -1)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten von w bezüglich dieser Basis.

(iii) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = (1, 1), \varphi(v_2) = 0, \varphi(v_3) = (-1, 2).$$

Bestimmen Sie $\varphi(w)$.