



Repetitorium Lineare Algebra Blatt 3

Aufgabe 11

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow V$$

ist gegeben durch

$$\varphi((1, 0, 0)) = (1, 1, 1), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (0, 1, 1), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (1, 0, 0).$$

- (i) Geben Sie Basen von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Im}(\varphi)$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \text{Im} \varphi = \dim V.$$

- (ii) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ ? Wie sieht φ^3 aus?

Aufgabe 13

Die Menge $\{(1, 3), (2, 1), (4, 7)\} \subset \mathbb{R}^2$ bildet ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$.

- (i) Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi((1, 3)) = (-2, -1), \quad \varphi((2, 1)) = (-6, -3), \quad \varphi((4, 7)) = (-10, -5).$$

indem Sie $\varphi((x, y))$ für ein beliebiges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ angeben.

- (ii) Bestimmen Sie Bild und Kern von φ , indem Sie für beide Unterräume Basen angeben. Was ist $\ker \varphi \cap \text{Im} \varphi$?

Aufgabe 14

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie jeweils Formeln für A^n und B^n , $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie sie mittels vollständiger Induktion.