Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2014
Dr. D.K. Huynh

Blatt 3

Aufgabe 12
Untersuchen Sie, ob für die folgenden Mengen das Supremum und das Infimum existiert und geben Sie sie gegebenenfalls an:

(a) $M = \mathbb{N}$ (b) $M = \mathbb{R}$ (c) $M = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $M = \{\sin(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$ (e) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 1\}$

(f) $M = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 13
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 14
Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien gegeben durch

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1} \text{ und } b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}.$$

Prüfen Sie die Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz bzw. Divergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz.

Aufgabe 15
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Wir definieren eine Folge a_n rekursiv durch

$$a_1 := a$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie, dass a_n konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 16
Geben Sie Beispiele reeller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \mathit{und} \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

so dass gilt

(a) $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = +\infty.$

(b) $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = -\infty.$

(c) $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = c,$ wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.