



Blatt 7

Aufgabe 30

Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen

$$(a) \quad f(x) = x^2 \sin(x) \quad (b) \quad \log(f(x)) \quad (c) \quad \exp(\sin(x^2 + 4))$$
$$(d) \quad \frac{x^3 + 1}{2014x^{2014}} \quad (e) \quad f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, x \neq 0$$

Aufgabe 31

Bestimmen Sie für $a > 0$ die Grenzwerte der folgenden Funktionen

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + ax)}{x} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$
$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x^2}.$$

Aufgabe 32

Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Aufgabe 33

Es sei $x > 0$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von x^x .

Aufgabe 34

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung. Ist $f'(x)$ stetig?

Aufgabe 35

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.

Aufgabe 36

Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$$

streng monoton ist. Berechnen Sie die Ableitung $g'(1)$ der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y = 1$.