Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2014
Dr. D.K. Huynh

Blatt 8

Aufgabe 36
Bestimmen Sie

(a) $\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx$ (b) $\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx$

(c) $\int x^n \exp(x)dx$ ($n \in \mathbb{N}$ fest) (d) $\int \cos(3x+4)dx$ (e) $\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$

(f) $\int_1^2 \sin^2(x)dx$ (g) $\int_1^2 \ln(x)dx$ (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$

Aufgabe 37
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$x \mapsto \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt.$$

Begründen Sie die Existenz der Ableitung von f und berechnen Sie diese.

Aufgabe 38
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f'(x) \text{ und } f(0) = 1.$$

Weisen Sie nach, dass Sie tatsächlich alle Lösungen gefunden haben.

Aufgabe 39
Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $\log(x)$ mit Entwicklungspunkt $x = 1$.

Aufgabe 40
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Ferner sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die n-te Ableitung von f die folgende Form hat

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Aufgabe 41
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Bestimmen Sie im positiven Fall den Grenzwert.

Aufgabe 42
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k - 2}{4^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ mit $s \in \mathbb{Q}$ und $s < 1$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$.

Aufgabe 43
Sei $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig, gleichmäßig stetig, Lipschitz-stetig? Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 44
Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x + 5$$

injektiv ist. Welchen Wert hat die Ableitung $g'(y)$ der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y = 5$?