Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2014
Dr. D.K. Huynh

Blatt 8

Aufgabe 36
Bestimmen Sie

(a) $\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx$ (b) $\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx$

(c) $\int x^n \exp(x)dx$ ($n \in \mathbb{N}$ fest) (d) $\int \cos(3x+4)dx$ (e) $\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$

(f) $\int_1^2 \sin^2(x)dx$ (g) $\int_1^2 \ln(x)dx$ (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$

Lösung. In der Folge bezeichne $c \in \mathbb{R}$ eine (additive) Integrationskonstante.

(a) Es gilt

$$\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx = x^4 + \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Es handelt sich um eine endliche Summe, daher dürfen wir gliedweise integrieren, und erhalten

$$\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \int x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

(c) Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int x^n \exp(x)dx = x^n \exp(x) - n \int x^{n-1} \exp(x)dx.$$

Erneute partielle Integration liefert

$$\int x^n \exp(x)dx = x^n \exp(x) - nx^{n-1}\exp(x) + n(n-1)\int x^{n-2}\exp(x)dx.$$

Mit jeder weiteren partiellen Integration reduziert sich der Grad des Faktors x^n, induktiv erhalten wir also

$$\int x^n \exp(x)dx = \exp(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + c.$$

(d) Substitution liefert

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\int 3 \cdot \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3} \cdot \sin(u) + c, c \in \mathbb{R}$$

mit $u(x) = 3x + 4$. Also

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4) + c, c \in \mathbb{R}.$$

(e) Wir erhalten

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}dx = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{1+x^2}(x+2x^3) - \log(x+\sqrt{1+x^2})\right].$$

Begründung wird nachgeliefert!

(f) Partielle Integration liefert

$$\int \sin(x)\sin(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)\cos(x)dx.$$

Wir nutzen aus, dass

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \text{ also}$$

$$\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx.$$

Daraus folgt

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx,$$

und daher

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}.$$

Folglich

$$\int_1^2 \sin^2(x)dx = \left[\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}\right]_1^2.$$

(g) Wir wenden partielle Integration an

$$\int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln(2) - (0-1) = 2\ln(2) + 1.$$

Aufgabe 37

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$x \mapsto \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt.$$

Begründen Sie die Existenz der Ableitung von f und berechnen Sie diese.

Lösung. Da $\exp(t^2)$ die Verkettung stetiger Funktionen ist, ist $\exp(t^2)$ stetig. Nach Teil 1 des Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist

$$f(x) = \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt$$

daher differenzierbar und eine Stammfunktion zu $\exp(\sin^2(x))$. Es sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x) := \exp(x^2)$. Nach Teil 2 des HDI gilt somit

$$\int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt = G(\sin(x)) - G(4).$$

Differentiation mit der Kettenregel liefert dann die gesuchte Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left[G(\sin(x)) - G(4)\right] = g(\sin(x)) \cdot \sin'(x) = \exp(\sin^2(x)) \cdot \cos(x).$$

Aufgabe 38
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f'(x) \text{ und } f(0) = 1.$$

Weisen Sie nach, dass Sie tatsächlich alle Lösungen gefunden haben.
Lösung.
Behauptung: Die einzige Funktion $f(x)$, die die Bedingungen erfüllt, ist die Exponentialfunktion $\exp(x)$.
Beweis: Offenbar erfüllt $f(x) = \exp(x)$ die Bedingungen. Sei nun $g(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $g(x) = g'(x)$. Wir differenzieren den Quotienten $g(x)/f(x)$ und erhalten mit der Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)}.$$

Nach Voraussetzung ist der Zähler gleich 0. Somit ist

$$\frac{g(x)}{f(x)} = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$g(x) = c \cdot \exp(x).$$

Fordern wir $g(0) = 1$, so folgt $c = 1$, das heißt $g(x) = \exp(x)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 39
Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $\log(x)$ mit Entwicklungspunkt $x = 1$.
Lösung. Wir setzen

$$f(x) = \log(x).$$

Für die k-te Ableitung gilt dann

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!x^{-k}$$

und damit

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

Daher ist die Taylor-Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x = 1$ gegeben durch

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k}.$$

Aufgabe 40
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Ferner sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die n-te Ableitung von f die folgende Form hat

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Lösung. Wir führen vollständige Induktion durch. Als Induktionsanfang können wir $n = 0$ oder $n = 1$ wählen. Für $n = 0$ ergibt sich, dass

$$f^{(0)}(x) = (-1)^0 \frac{a^0 \cdot 0!}{(ax+b)^{0+1}} = \frac{1}{ax+b} = f(x).$$

Also stimmt die behauptete Formel für die 0-te Ableitung (diese entspricht gerade $f(x)$). Alternativ leiten wir $f(x)$ nach der Kettenregel ab und erhalten

$$f'(x) = (-1)(ax+b)^{-2} \cdot a = (-1)\frac{a}{(ax+b)^2} = (-1)^1 \frac{a^1 \cdot 1!}{(ax+b)^{1+1}},$$

was der Formel für $n = 1$ entspricht. Also gilt die Behauptung für $n = 1$.

Es gelte die Behauptung nun für ein $n \in \mathbb{N}$, also haben wir

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}. \tag{1}$$

Zu zeigen ist

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}. \tag{2}$$

Wir leiten (1) nach der Kettenregel ab und erhalten

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n a^n \cdot n!(-1)(n+1)(ax+b)^{-(n+2)} \cdot a \\ &= (-1)^{n+1} a^{n+1}(n+1)!(ax+b)^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass (1) die Aussage (2) impliziert und der Induktionsschritt ist vollzogen.

Aufgabe 41

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Bestimmen Sie im positiven Fall den Grenzwert.

Lösung.

(a) Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Offenbar gilt

$$a_1 = 1 \geq \frac{1}{2},$$

damit gilt die Aussage für $n = 1$. Es gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir haben zu zeigen, dass dann auch

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Das sehen wir so ein

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3} \overset{(IV)}{=} \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Folge ist monoton fallend. Wir zeigen

$$a_n \geq a_{n+1},$$

dies ist äquivalent zu

$$a_n - a_{n+1} \geq 0.$$

Es gilt

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + 1}{3} = \frac{3a_n - a_n - 1}{3} = \frac{2a_n - 1}{3} \overset{(a)}{\geq} \frac{\frac{1}{2} - 1}{3} = 0,$$

damit ist a_n monoton fallend.

(c) Da a_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist a_n konvergent. Es sei a der Grenzwert von a_n. Aus der Definiton der Folge

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3}$$

folgt somit

$$a = \frac{a + 1}{3},$$

dies ergibt

$$a = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 42

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k - 2}{4^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ mit $s \in \mathbb{Q}$ und $s < 1$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$.

Lösung.

(a) Die Folge

$$a_k := \frac{5^k - 2}{4^k}$$

ist keine Nullfolge. Mithin kann $\sum_k a_k$ nach dem Nullfolgenkriterium nicht konvergieren.

(b) Für $s \in \mathbb{Q}$ und $s < 1$ gilt

$$k^s < k \Rightarrow \frac{1}{k^s} > \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s} > \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$$

Die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$ divergiert, also divergiert auch $\sum_k \frac{1}{k^s}$ nach dem Minorantenkriterium.

(c) Wir haben

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Also ist

$$s_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k!}$$

eine Teleskopsumme, und wir haben

$$s_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{N!}.$$

Somit haben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N!}\right) = 1.$$

Aufgabe 43
Sei $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{für } x \leq 1 \\ 3-x & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig, gleichmäßig stetig, Lipschitz-stetig? Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antworten.
Lösung. f wird auf $[-3,1)$ und (1,3] durch Polynomfunktionen definiert und ist daher auf diesen Abschnitten stetig. Zu untersuchen ist die Stelle $a = 1$. Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 3-x = 2$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2+1 = 2.$$

Mithin stimmen rechts- und linkseitiger Grenzwert an der Stelle $a = 1$ überein. Damit ist $f(x)$ auch dort stetig. Jede stetige Funktion auf kompakten Intervallen ist auch gleichmäßig stetig. Also ist $f(x)$ auf $[-3,3]$ gleichmäßig stetig. f ist auch Lipschitz-stetig, dies sehen wir weiter unten.

f ist differenzierbar auf $[-3,1)$ und (1,3], da Polynomfunktionen differenzierbar sind. f ist nicht differenzierbar an der Stelle $a = 1$: Es gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{3-(1+h)-(1^2+1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2-h-2}{h} = -1.$$

Und ferner

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{(1+h)^2+1-(1^2+1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{2h+h^2}{h} = 2.$$

Wir lesen unmittelbar ab, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $a = 1$ nicht übereinstimmen, daher ist f an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Somit existiert $f'(x)$ auf $[-3,1)$ und $(1,3]$. Auf diesen Abschnitten ist $f'(x)$ beschränkt. Damit ist f auf $[-3,1)$ und $(1,3]$ Lipschitz-stetig. Wir behaupten nun, dass f auf ganz $[-3,3]$ Lipschitz-stetig ist. Es sei $x \in [-3,1]$ und $y \in (1,3]$. Gesucht ist dann L mit

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 + 1 - 3 + y| \leq L|x - y| \leq L \cdot 6,$$

da $|x-y| \leq 6$. Wir setzen

$$L = \sup_{x,y} \left\{ \frac{|x^2 + 1 - 3 + y|}{6} \right\}$$

und haben damit eine Lipschitz-Konstante gefunden.

Aufgabe 44

Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x + 5$$

injektiv ist. Welchen Wert hat die Ableitung $g'(y)$ der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y = 5$?

Lösung. Offenbar ist die Funktion f differenzierbar und wir erhalten

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2,$$

diese lässt sich schreiben als

$$f'(x) = 5\left(x^4 - \tfrac{6}{5}x^2 + (\tfrac{3}{5})^2\right) - 5(\tfrac{3}{5})^2 + 2 = 5(x^2 - \tfrac{3}{5})^2 + \tfrac{1}{5}.$$

Mithin gilt für alle x, dass

$$f'(x) = 5(x^2 - \tfrac{3}{5})^2 + \tfrac{1}{5} > 0,$$

also ist $f(x)$ streng monoton wachsend und somit injektiv. Für die Ableitung der Umkehrfunktion g gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

mit $y = f(x)$. Es ist $f(0) = 5$. Daher haben wir

$$g'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$